

ADAM G. POLAK

# **Miernictwo elektroniczne**

Komentarz do wykładów przeznaczony dla studentów  
Wydziału Elektroniki Politechniki Wrocławskiej

Katedra Metrologii Elektronicznej i Fotonicznej  
Wydział Elektroniki Politechniki Wrocławskiej

Wrocław 2014

Komentarz został przygotowany z wykorzystaniem informacji i ilustracji zawartych w podanej bibliografii.

© Adam G. Polak 2014

# **Część I**

## **Podstawy pomiarów**



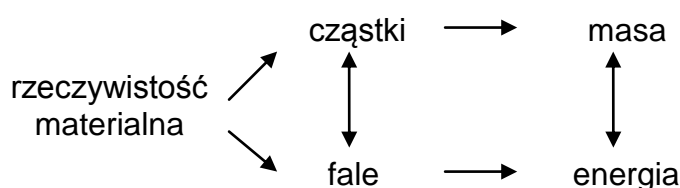
# 1. Wprowadzenie do metrologii

## 1.1. Pojęcia podstawowe

**Metrologia** (1): nauka o mierzeniu ( $\mu\epsilon\tau\rho\omicron\nu$  – miara,  $\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$  – słowo)

**Nauka** to obszar działalności (niektórzy mówią: kultury) człowieka mającej na celu obiektywne poznanie, opis i zrozumienie „tego, co istnieje” (tzw. rzeczywistości).

**Rzeczywistość materialną** spostrzegamy jako przestrzeń, czas, materię, energię i oddziaływania.



Tworzywem obiektywnie istniejącej rzeczywistości (niezależnej od poznania) jest materia (przez filozofów starożytnych zwana substancją).

Nauki przyrodnicze zajmują się poznaniem świata materialnego (przyrody martwej i ożywionej w skali mikro, makro i kosmicznej), posługując się metodami eksperymentalnymi.

Wyjaśnianie w naukach przyrodniczych polega na podawaniu powiązań jakościowych i ilościowych. Nauka zasadniczo nie daje odpowiedzi na pytanie „dlaczego?”; z pewnością nie mówi „po co?”.

Nauka posługuje się metodami naukowymi, zwanymi też paradygmatami nauki.

**Metoda naukowa** to powszechnie uznany sposób działania prowadzącego do pozyskania obiektywnej wiedzy i jej formalnego opisu.

**Wiedza naukowa** to (generalnie) spójny zbiór powszechnie uznanych twierdzeń o rzeczywistości, co do których nie wykazano nieprawdziwości, (w zasadzie) zgodnych z przeprowadzonymi doświadczeniami.

Twierdzeń naukowych nie można udowodnić poprzez żadne doświadczenie empiryczne – pozytywne wyniki doświadczeń zwiększają jedynie nasze zaufanie do takiego twierdzenia. Doświadczalnie można za to je obalić. Za naukowe uważa się twierdzenia, co do których można zaproponować doświadczenia je falsyfikujące.

**Hipoteza naukowa** jest próbą wyjaśnienia zaobserwowanych prawidłowości poprzez podanie związku przyczynowego-skutkowego. Aby to wyjaśnienie zostało włączone w zakres wiedzy naukowej, hipoteza musi zostać zweryfikowana.

W naukach przyrodniczych związek ten najczęściej przybiera formę równań matematycznych, tj. modelu matematycznego.

Formułowane hipotezy są zazwyczaj spójne z posiadaną wiedzą. Bywa jednak, że nie są one z nią zgodne – wtedy po ich akceptacji mówimy o rewolucji naukowej.

**Eksperyment** polega na zaplanowanym wywołaniu pożądanego stanu obiektu fizycznego w kontrolowanych warunkach, a stan ten analizowany jest na drodze pomiarów. Celem eksperymentu jest weryfikacja wcześniej sformułowanej hipotezy. Zgodność wyników eksperymentów z postawioną hipotezą powoduje, że staje się ona twierdzeniem.

Kolejnymi etapami eksperymentu są: sformułowanie hipotezy, określenie warunków jej falsyfikacji, zaplanowanie doświadczenia z uwzględnieniem metody naukowej i środków technicznych, przygotowanie stanowiska, przeprowadzenie doświadczenia w kontrolowanych warunkach – wykonanie pomiarów, opracowanie wyników, wykazanie zgodności wyników z hipotezą lub ich sprzeczności.

**Koncepcja naukowa** to taka hipoteza wyjaśniająca wyniki obserwacji lub doświadczeń, której (na obecnym etapie rozwoju nauki) nie można zweryfikować doświadczalnie – możliwe jest zatem funkcjonowanie kilku równoważnych koncepcji.

**Pomiar** to empiryczny proces poznawczy polegający na obiektywnym przyporządkowaniu wartości liczbowych rozróżnialnym jakościowo cechom (właściwościom) badanych obiektów fizycznych (jest to zatem odwzorowanie właściwości obiektu w dziedzinę liczb).

To, że pomiar jest procesem empirycznym oznacza, iż jego przeprowadzenie wymaga zastosowania środków materialnych wobec badanej części świata realnego.

Nazwanie pomiaru procesem poznawczym wskazuje na fakt, iż jego przeprowadzenie pozwala uzyskać dodatkową informację o badanym obiekcie.

Obiektywizm pomiaru przejawia się w tym, że jego wynik jest niezależny od obserwatora.

Efektom pomiaru są co najmniej dwa elementy liczbowe: pierwszy określa wartość mierzonej wielkości, a drugi oszacowaną dokładność pomiaru. Określeniem wartości może być dowolna liczba (naturalna, całkowita, wymierna, niewymierna) lub inny obiekt matematyczny (np. szereg, wektor, macierz, tensor, funkcja, rozkład itd).

Warunkiem przeprowadzenia pomiaru jest wyodrębnienie obiektu fizycznego z otaczającej rzeczywistości oraz wyróżnienie jego mierzalnej cechy.

Obiektem fizycznym nazywamy badaną część rzeczywistości, którą jest substancja, część składowa, całość lub zbiór ciał (przedmiotów martwych i istot żywych) lub związane z nimi zjawisko.

Wyróżnialną właściwość obiektu fizycznego, którą można oceniać jakościowo (porównywać) i ilościowo (mierzyć), nazywamy wielkością fizyczną lub mierzalną; jest ona modelem właściwości obiektu.

Wielkość mierzona, a w zasadzie jej model, nazywa się *mezurandem*, a rzeczywistą jej wartość *wartością prawdziwą*.

**Wielkości fizyczne** można klasyfikować biorąc pod uwagę wiele kryteriów. Najczęściej dzieli się je na:

- ciągłe i dyskretne,
- czynne i bierne,
- addytywne i nieaddytywne,
- elektryczne i nieelektryczne.

Wielkości ciągłe (zwane też analogowymi) mogą przyjmować dowolną wartość liczbową z charakterystycznego zakresu, a ich przyrost również może mieć dowolną wartość (w zakresie zmienności).

Wielkości dyskretne (inaczej – ziarniste) przyjmują z góry określone poziomy wartości rozłożone równomiernie lub nierównomiernie w charakterystycznym zakresie i w związku z tym mogą zmieniać się tylko „skokowo”, czyli o skończone przyrosty zwane kwantami.

Wielkości czynne (nazywane też aktywnymi) są nośnikami energii, która może być wykorzystywana m.in. przez przyrządy pomiarowe.

Wielkości bierno manifestują swe istnienie po dostarczeniu energii do badanego obiektu fizycznego.

Wielkości addytywne spełniają zasadę, że wartość sumy ich elementów składowych (w badanym układzie) jest sumą wartości tych elementów (np. masa, ładunek elektryczny).

Wielkości nieaddytywne nie spełniają podanej uprzednio zasady (np. temperatura, stężenie).

**Metrologia** (2) jest nauką o zasadach prowadzenia pomiarów i analizy ich wyników, ukierunkowaną na poznanie ilościowe, a w ostateczności na uzyskanie w świadomości człowieka jak najwierniejszego obrazu rzeczywistości.

**Technika** to całokształt środków i czynności związanych z wytwarzaniem przez człowieka dóbr materialnych oraz reguły posługiwania się tymi środkami.

Grecki termin τέχνη oznacza: sztuka, rzemiosło, kunszt, umiejętność.

**Technika pomiaru** to sposób jego wykonania z wykorzystaniem praw fizyki (zasady pomiaru) i metody pomiaru oraz dostępnych środków technicznych.

**Zasada pomiaru** to zjawisko fizyczne wykorzystywane podczas pomiaru (np. ruch wahadła przy pomiarze czasu zegarem mechanicznym).

**Miernictwo** jest techniką prowadzenia pomiarów.

## 1.2. Cztery koncepcje praw przyrody

Koncepcje praw przyrody wg A. N. Whiteheada:

(1) Prawo przyrody jest “nałożone” na Wszechświat, jest od niego wcześniejsze i niezależne – gdyby istniało kilka światów np. z różnym rozkładem materii i energii – w każdym z nich funkcjonować będą takie same prawa przyrody.

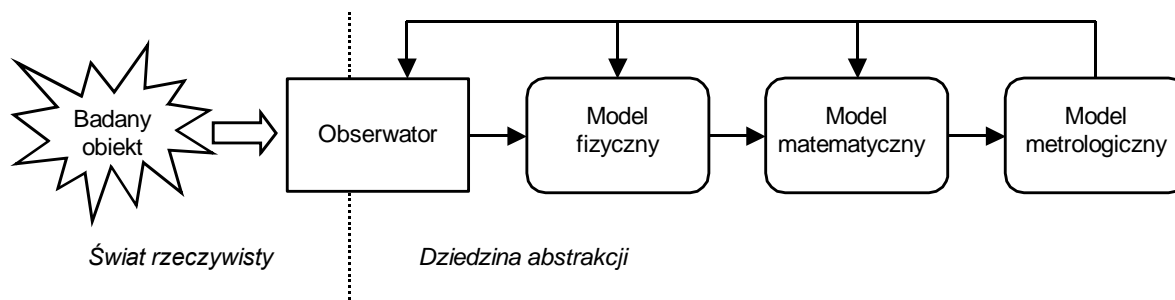
(2) Prawa przyrody są związane ze strukturą świata, tzn. struktura Wszechświata wyznacza prawa przyrody – we Wszechświecie z innym rozkładem materii i energii prawa przyrody byłyby inne.

(3) Pozytywistyczna koncepcja prawa przyrody jako zaobserwowanego porządku następstw; porządek taki nie jest niczym istotnym we Wszechświecie – jest tylko opisem tego, co obserwujemy.

(4) Koncepcja konwencjonalistyczna prawa przyrody jako umowy.

## 1.3. Proces poznawczy w metrologii

### Schemat procesu poznawczego w metrologii



Model fizyczny (jakościowy): wyróżnienie podstawowych właściwości i zjawisk fizycznych i często ich uproszczone ujęcie.

Model matematyczny (jakościowo-ilościowy): układ równań matematycznych opisujących wyróżnione właściwości i zjawiska fizyczne.

Model metrologiczny (ilościowy): przypisane wartości (poprzez pomiar) wyróżnionym wielkościom fizycznym (zmiennym i współczynnikom równań).

Sprzężenia zwrotne.

## 1.4. Pomiary w naukach przyrodniczych

### Krótką historia pomiarów

- okres prehistoryczny: określanie liczebności zbiorów
- Starożytność: świadectwa materialne (sprzed 3-6 tys. lat w.p.Ch.) prowadzenia pomiarów wymiarów geometrycznych, masy, objętości i czasu przez najstarsze cywilizacje Doliny Indusu, Sumerów, Egipcjan
- fizyka Arystotelesa
- nauka nowożytna (od XVII w.)
  - pierwsze przyrządy i eksperymenty Galileusza (1564-1642): „Licz, co można policzyć, mierz, co można zmierzyć, a to, co nie jest mierzalne, uczyn mierzalnym”
  - mechanika Newtona (1643-1727)
- rewolucja naukowo-techniczna (XX w.)
  - teoria względności (1905, 1915) Einsteina (1879-1955)
  - mechanika kwantowa (początek XX w.; Heisenberg, Schrödinger, Planck, Born, Bohr, Dirac i in.)
  - możliwość przewidywać teoretycznych → rozwój techniki
  - komercjalizacja techniki → gloryfikacja nauki
- stan obecny: dominacja techniki nad nauką
- przykład (pomiar czasu): zegar słoneczny (5,5 tys. lat p.Ch.), klepsydra wodna (starożytny Egipt i Mezopotamia), klepsydra piaskowa (średniowieczna Europa), zegar kołowy z ciężarkami (XIV w.), zegar kołowy ze sprężyną (XVI w.), zegar wahadłowy (1656), zegar kwarcowy (lata 30. XX w.), zegar atomowy (2. połowa XX w.)



## Rozwój teorii pomiarów

### Rozwój aparatury

- porównywanie bezpośrednie
- urządzenia mechaniczne
- urządzenia elektryczne, elektroniczne i optoelektroniczne

## 1.5. Determinizm w pomiarach

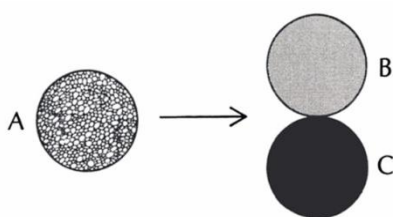
**Determinizm klasyczny** opisuje związki przyczynowo-skutkowe i konsekwencje ich istnienia wynikające z osiągnięć fizyki do czasu pojawienia się mechaniki kwantowej.

Konsekwencją fizyki Newtonowskiej jest umiejętność przewidzenia (tj. obliczenia) w jakim punkcie przestrzeni znajdzie się obiekt materialny w przyszłości, jeżeli wcześniej znane jest jego położenie i pęd.

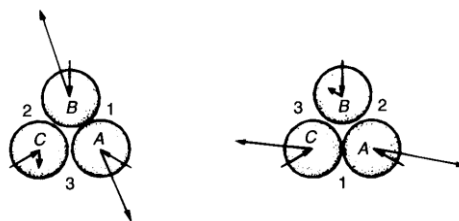
Za obiekty materialne uznać można np. atomy lub cząsteczki chemiczne – zatem znając ich położenie i pęd w chwili  $t_0$  można dokładnie określić, gdzie będą się znajdować w chwili  $t_0 + \Delta t$ . Innymi słowy: ponieważ masa i pęd tych elementów są w danej chwili ściśle określone (choć w całości, tj. dla wszystkich elementów jednocześnie, niemożliwe do poznania dla człowieka), to przesądzone jest (zeterminowane), gdzie będą się znajdować w dowolnej chwili w przyszłości. Wniosek ten dotyczy oczywiście wszystkich zbudowanych z nich obiektów, w tym człowieka.

Można powiedzieć, że „na szczęście” (biorąc pod uwagę postulat wolnej woli człowieka, z którego nie chcielibyśmy rezygnować) w klasycznym ujęciu fizyki zauważono istnienie **problemu trzech kulek**. W zasadzie należy rozważyć dwie sytuacje:

1) zderzenie sprężyste trzech kulek (jak na rys. 1.A) – w oparciu o prawa mechaniki klasycznej (zasada zachowania pędu i ciągłość materii) nie można przewidzieć kierunku ruchu kulek po zderzeniu, gdyż istnieje nieskończenie wiele rozwiązań równoważnych;



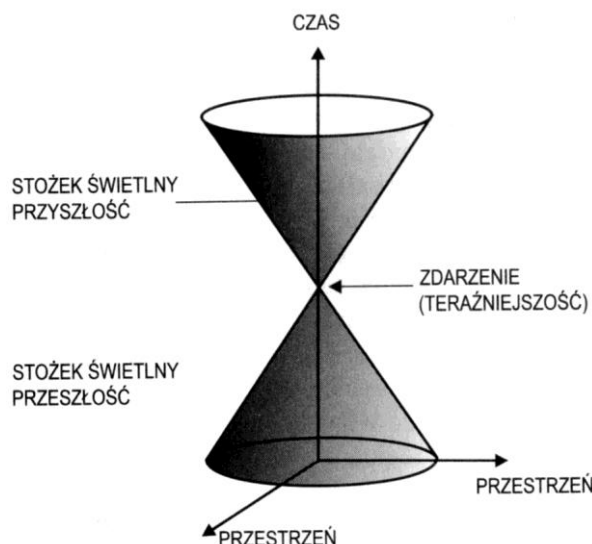
Rys. 1.A



Rys. 1.B

2) próba przewidzenia kierunku ruchu kulek po zderzeniu na podstawie pomiarów przed zderzeniem może dać całkowicie błędny wynik (jak na rys. 1.B), nawet przy najmniejszym błędzie pomiaru położenia czy pędu (a żadnego pomiaru nie da się wykonać bezbłędnie).

**Ograniczenie „zasięgu” determinizmu** w czasoprzestrzeni jest konsekwencją szczególnej i ogólnej *teorii względności*.



**(In)determinizm w pomiarach kwantowych** został dostrzeżony wraz ze sformulowaniem mechaniki kwantowej. Takie rozumienie możliwości przewidywania ewolucji materii wynika z odkrytej przez Heisenberga *zasady nieoznaczoności* oraz probabilistycznego opisu zachowania się układów kwantowych za pomocą *funkcji falowych* zaproponowanych przez Schrödingera.

**Zasada nieoznaczoności Heisenberga** związana jest z oddziaływaniem aparatury pomiarowej z badanym obiektem i dotyczy par wielkości fizycznych kanonicznie sprzężonych, takich jak: położenie i pęd, czas i energia itd.

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar = h/2\pi,$$

$$\Delta t \cdot \Delta E \geq \hbar,$$

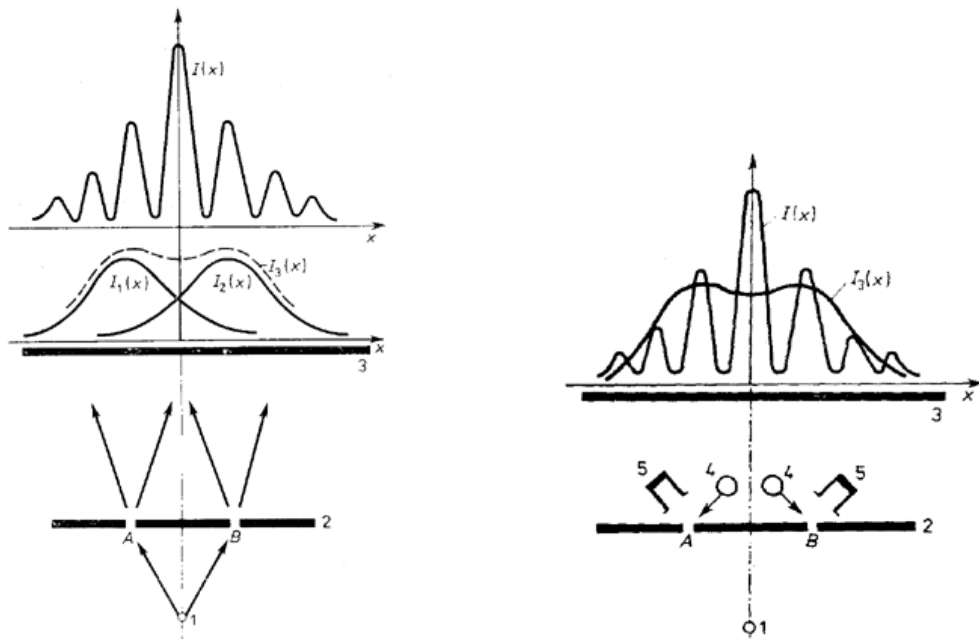
gdzie:  $x$  – położenie w przestrzeni,  $p$  – pęd,  $t$  – czas,  $E$  – energia,  $h \approx 6,6256 \cdot 10^{-34}$  – stała Plancka.

Na przykład, chcąc „zaobserwować” cząstkę elementarną, należy użyć fali elektromagnetycznej o odpowiednio małej długości ( $\lambda$ ), a tym samym o dużej energii, co powoduje, że fala ta wchodząc w interakcję z badaną cząstką zmienia jej pęd: zatem im mniejsza  $\lambda$ , tym dokładniej znamy położenie cząstki, ale mniej dokładnie jej pęd.

**Przykład:** Rejestracja toru elektronu na kliszy fotograficznej. Rozróżnialność przestrzenna związana jest z rozmiarami ziarna emulsji fotograficznej  $\Delta x \approx 10^{-6}$  m. Stąd niedokładność określenia prędkości wynosi  $\Delta v \approx 10^2$  m/s, co stanowi 0.01% prędkości elektronu.

**Doświadczenie z interferometrem** (rys.) pozwoliło zaobserwować *dualizm korpuskularno-falowy* cząstek elementarnych (elektronów).

W zależności od zastosowanej metody pomiarowej elektrony zachowują się jak fala elektromagnetyczna (interferometr) lub korpuskuły (detektory cząstek).



Podczas **pomiaru kwantowego** badany obiekt przyjmuje jeden z potencjalnie możliwych stanów (określonych wcześniej prawdopodobieństwem jego zaistnienia) w wyniku interakcji z aparaturą pomiarową.

## 1.6. Zagadnienia kontrolne

Czym jest: metrologia, pomiar, miernictwo

Koncepcje praw przyrody (dwie pierwsze)

Schemat procesu poznawczego w pomiarach

Na czym polega indeterminizm pomiarów kwantowych

## 2. Informacja i miary jej ilości

### 2.1. Informacja

**Informacja** jest pewnego rodzaju relacją pomiędzy obiektami, związaną ze zmianą stanu jednego z nich i tym samym ze zmianą jego nieokreśloności.

Informacje o dowolnym obiekcie można uzyskać jedynie na drodze materialnego współoddziaływania z tym obiektem.

Transport informacji przebiega w układzie: źródło, nośnik, układ przesyłania, odbiornik, przy obecności zakłóceń.

### 2.2. Miary informacji

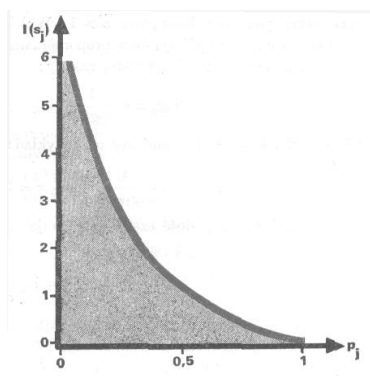
Treści tego podrozdziału opisują informację w ujęciu probabilistycznym.

Źródło informacji można scharakteryzować prawdopodobieństwem pojawienia się jednego z możliwych stanów (np. rzut kostką lub jedna z wartości wielkości mierzonej).

**Liniową miarą informacji** jest liczba skwantowanych stanów, jakie może przyjmować źródło (definicja wygodna w operacjach dodawania i odejmowania).

**Logarytmiczna miara informacji  $I$**  jest proporcjonalna do prawdopodobieństwa zdarzenia (stanu)  $p$  (definicja wygodna w operacjach mnożenia i dzielenia).

$$I = -\log_2 p$$



**Bit** to jednostka ilości informacji odpowiadająca informacji uzyskanej po zajściu zdarzeniu, którego prawdopodobieństwo wynosi  $1/2$  (przyjęcie jednego ze stanów najprostszego źródła informacji):

$$-\log_2(1/2) = \log_2 2 = 1$$

**Entropia informacji** jest miarą nieoznaczoności źródła, równą średniemu przyrostowi informacji przypadającej na jedno z  $k$  zdarzeń

$$H = -p_1 \cdot \log_2(p_1) - p_2 \cdot \log_2(p_2) - \dots - p_k \cdot \log_2(p_k)$$

Gdy kolejne zdarzenia są niezależne i jednakowo prawdopodobne, tj.  $p = 1/k$ :

$$H_k = k \cdot \left( -\frac{1}{k} \log_2 \frac{1}{k} \right) = -\log_2 \frac{1}{k} = -\log_2 p = I$$

## 2.3. Pozyskiwanie informacji

W wyniku **obserwacji** uzyskuje się zwykle informację jakościową, subiektywną, niepowtarzalną.

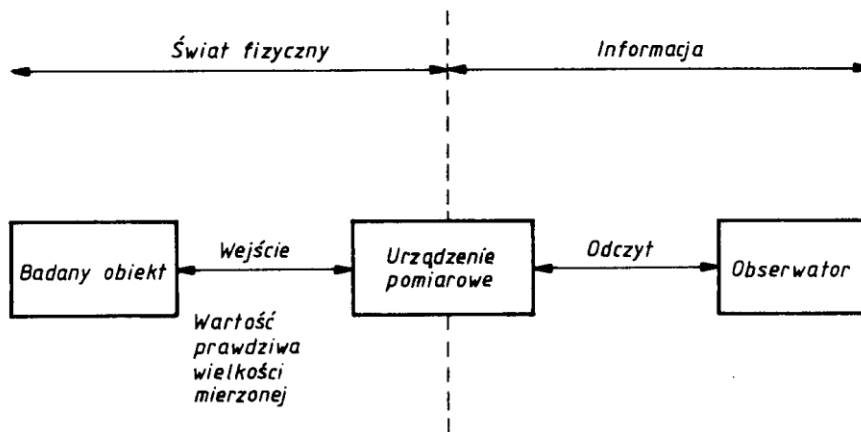
**Eksperyment** to zespół czynności mających na celu doświadczalną weryfikację hipotezy poprzez wywołanie badanego zjawiska lub jego zmian, przeprowadzonych w warunkach kontroli czynników wpływających.

W naukach przyrodniczych podstawowym elementem eksperymentów są pomiary.

Eksperymenty dzieli się na czynne i bierne.

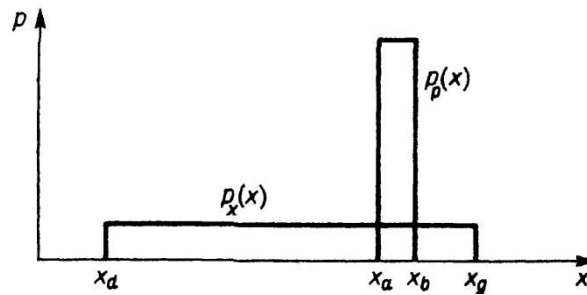
## 2.4. Pomiar i jego związek z informacją

Poniższy rysunek w kolejnym ujęciu pokazuje elementy procesu pomiarowego.



**Pomiar** prowadzi do **zmniejszenia entropii informacji**, czyli innymi słowy do pozyskania informacji (entropia jest tym mniejsza im większa ilość informacji).

Przykład: pomiar jednej z jednakowo prawdopodobnych wartości z przedziału  $\langle x_d, x_g \rangle$  daje  $x_a \leq x_0 \leq x_b$

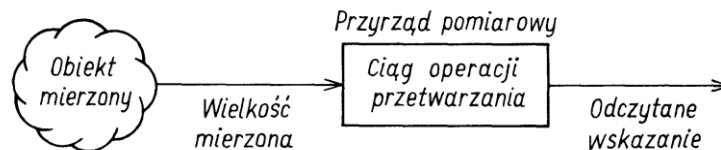


Ponieważ  $x_b - x_a \ll x_g - x_d$ , zatem (przypadek gdy  $H=I$ ):

$$H_x = -\log_2 \left( \frac{1}{x_g - x_d} \right) = \log_2 (x_g - x_d) \gg \log_2 (x_b - x_a) = -\log_2 \left( \frac{1}{x_b - x_a} \right) = H_p$$

Stąd wniosek: jakość przyrządu decyduje o ilości uzyskiwanej informacji.

Na pomiar można spojrzeć jako na proces przetwarzania *nośnika informacji*



## 2.5. Zagadnienia kontrolne

Co to jest informacja i jakie są jej miary

Na czym polega związek pomiaru z informacją

## 3. Jednostki i układy miar

### 3.1. Interpretacja wyniku pomiaru

**Pomiar** polega na przyporządkowaniu wartości liczbowych na obiektywnym przyporządkowaniu wartości liczbowych rozróżnialnym właściwościom badanych obiektów fizycznych.

Liczba przyporządkowana mierzonej wielkości fizycznej może być **interpretowana** jako *stosunek wartości tej wielkości do wartości jednostkowej*. Zatem, aby wykonać pomiar, należy zdefiniować wartość jednostkową, wykonać i użyć jej fizyczną realizację (*wzorzec*), dokonując porównania wybranym sposobem (*metoda pomiaru*).

### 3.2. Krótka historia jednostek miar

Jako pierwsze stosowane były **jednostki naturalne**, których wzorce wykorzystywały występujące w przyrodzie obiekty lub zjawiska. Mierzono:

- czas (np. doba, miesiąc księżycowy, rok),
- długość (cał – długość kciuka i małego palca, stopa, łokieć),
- objętość (garść, garniec),
- powierzchnia (morga – obszar zaorany parą wołów w ciągu dnia).

Pierwsze próby **obiektywizacji jednostek** datują się na XVI w., np. określano średni łokieć i stopa (np. średnia dla pierwszych 6 osób wychodzących z kościoła; 1575).

Kolejnym etapem było opieranie definicji jednostek o bardziej **niezmienne elementy przyrody**; i tak np., korzystając z ówczesnych osiągnięć naukowych, ustalono jednostkę długości jako dziesiątą część wyznaczonych właśnie wymiarów Ziemi (1670).

#### Historia systemu SI

Utworzenie dziesiątego *Systemu Metrycznego* we Francji w roku 1795 podczas Rewolucji, wykonanie dwóch wzorców platynowych (1799): *metra* i *kilograma*.

Promocja *Systemu Metrycznego* przez Gaussa (1832), który pokazał, że wraz z *sekundą* definiowaną w astronomii stanowią one spójny system *trzech jednostek mechanicznych* w naukach fizycznych (*milimetr*, *gram*, *sekunda*), w tym przy pomiarach wielkości magnetycznych i elektrycznych.

Przykładem wykorzystywanych zależności może być następująca:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2} \xrightarrow{q_1=q_2, k=\epsilon=1} q = r\sqrt{F}$$

J.C. Maxwell i W. Thomson (lata 60-te XIX w.) zauważyli potrzebę istnienia systemu składającego się z dwóch grup jednostek: *podstawowych* i *pochodnych*.

Brytyjczycy zaproponowali spójny system jednostek mechanicznych CGS (*centymetr, gram, sekunda*) wraz z dziesiętnymi prefiksami w zakresie od *mikro* do *mega*.

Ponieważ system CGS okazał się niewygodny i niewystarczający w pomiarach magnetycznych i elektrycznych, BAAS i International Electrical Congress (IEC) (lata 80-te XIX w.) uzgodniły spójny zbiór jednostek praktycznych, obejmujący m.in.: *om, wolt, amper*.

Ustanowienie *Konwencji Metrycznej* w 1875 r., podpisanej przez przedstawicieli wielu państw (Polska przystąpiła do niej w roku 1925).

Ustanowienie jako jednostek podstawowych *metra* i *kilograma* (1889), które razem z astronomiczną *sekundą* dały system MKS.

Giorgi w 1901 r. pokazuje, że układ jednostek mechanicznych MKS można połączyć z elektrycznymi jednostkami praktycznymi tworząc spójny system czterech jednostek (dodatkowa jednostka natury elektrycznej, jak *om* lub *wolt*).

W latach 1939-1946 zaproponowano i przyjęto system czterech jednostek podstawowych: *metr, kilogram, sekunda, amper* (MKSA).

W roku 1954 potwierdzono zastosowanie ampera i dodano jednostki *kelwin* i *kandela* do określenia temperatury termodynamicznej i światłości; systemowi temu nadano w 1960 r. nazwę *Système International d'Unités* (SI).

System SI uzupełniono o *mol* jako jednostkę liczebności materii w 1971 r.

Na podstawie ustaleń z lat 1983 zdefiniowano dokładnie wartości niektórych (wybranych jako niezależne od innych) stałych fizycznych (określanych wcześniej na drodze pomiarów), m.in. prędkość światła w próżni  $c = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  i przenikalność magnetyczną próżni  $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ , oraz zmieniono definicje jednostek podstawowych.

### 3.3. Podział jednostek miar, wzory definicyjne, układ jednostek

**Układ jednostek miar** to uporządkowany zbiór jednostek utworzony na podstawie umowy przyjętych jednostek *podstawowych* oraz ustalonych *równań definicyjnych* służących do zdefiniowania *jednostek pochodnych*.

**Jednostki podstawowe** wybrane zostały arbitralnie, z uwzględnieniem zaszłości historycznych. Są one od siebie wymiarowo niezależne (tzn. że żadnej z nich nie da się przedstawić jako algebraicznej kombinacji pozostałych).

**Jednostki pochodne** tworzone są jako iloczyny potęg jednostek podstawowych, zgodnie z zależnościami algebraicznymi łączącymi rozważane wielkości fizyczne. Nazwy i symbole niektórych jednostek pochodnych utworzonych w ten sposób mogą być zastępowane innymi



specyficznymi nazwami i symbolami (np. *wolt* V, *om* Ω), które dalej mogą być wykorzystywane do określania innych jednostek pochodnych.

**Wzory definicyjne** wyrażają powiązanie między jednostkami pochodnymi i podstawowymi, i mają ogólną postać:

$$Q = k \cdot A^{\alpha} \cdot B^{\beta} \cdot C^{\gamma} \cdot \dots,$$

gdzie  $Q$  jest jednostką pochodną;  $A, B, C, \dots$  to jednostki podstawowe,  $k$  jest liczbą rzeczywistą, a  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  są liczbami wymiernymi.

Każda wielkość fizyczna ma tylko jedną jednostkę w układzie SI (jeden wymiar fizyczny), choć można ją różnie wyrażać (np.  $V = J \cdot C^{-1} = W \cdot A^{-1} = kg \cdot m^2 \cdot A^{-1} \cdot s^{-3}$ ), jednakże niektóre mogą wyrażać miarę kilku wielkości.

**Prefiksy** w układzie SI określają dziesiętne wielokrotności lub podwielokrotności jednostek miar i posiadają swoje nazwy. Wyjątek stanowią prefiksy stosowane w określaniu masy (jednostka podstawowa – kg), które dołączane są do tradycyjnej jednostki *gram* [g].

## 3.4. Definicje jednostek podstawowych

Formalne definicje jednostek z układu SI zostały przyjęte po raz pierwszy w 1889 r., a ostatnio zmodyfikowane w roku 1983.

Wraz z ewolucją techniki definicje te są od czasu do czasu modyfikowane w celu umożliwienia coraz dokładniejszej praktycznej ich realizacji (w postaci *wzorców*).

**Jeden metr [m]** to długość drogi pokonywanej przez światło w próżni w przedziale czasu  $1/(299\,792\,458)$  sekundy.

**Jeden kilogram [kg]** równy jest masie międzynarodowego prototypu kilograma (wykonanego ze stopu platyny i irydu w roku 1889, przechowywanego w BIPM).

**Jedna sekunda [s]** to czas trwania 9 192 631 770 okresów promieniowania odpowiadającego przejściu atomu cezu  $^{133}\text{Cs}$  pomiędzy dwoma poziomami nadsubtelnymi stanu podstawowego w stanie spoczynku przy temperaturze 0 *kelwinów*.

**Jeden amper [A]** to takie natężenie prądu stałego, przepływającego przez dwa prostoliniowe, równoległe i nieskończenie długie przewody o pomijalnie małym przekroju poprzecznym, umieszczone w odległości 1 *metra* w próżni, które wytwarza między nimi siłę równą  $1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ .

**Jeden kelwin [K]** to  $1/273,16$  część termodynamicznej temperatury potrójnego punktu wody.

Posługując się *kelwinami* nie używa się pojęcia stopień, tak więc np. 0 *stopni Celsjusza* to 273,15 *kelwina*.

**Jeden mol [mol]** to ilość substancji w układzie, który zawiera tyle samo jednostek elementarnych ile jest atomów w 0,012 *kilograma* (12 *gramach*) węgla  $^{12}\text{C}$  (atomy niezwiązane w spoczynku, w stanie podstawowym).

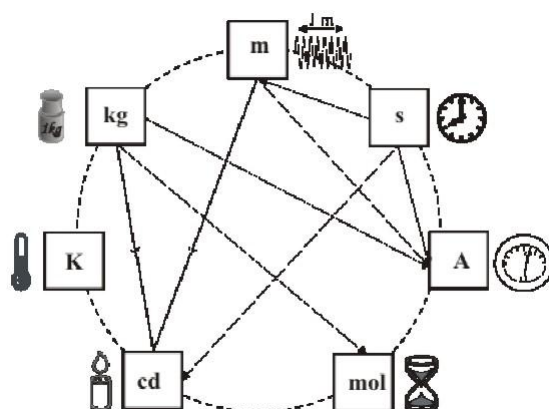
Używając *mola* należy sprecyzować jednostki elementarne, którymi mogą być atomy, cząsteczki chemiczne, jony, elektrony, inne cząsteczki lub określone grupy takich cząsteczek.

**Jedna kandela [cd]** to światłość źródła emitującego w danym kierunku promieniowanie monochromatyczne o częstotliwości  $540 \cdot 10^{12}$  herców i mającego natężenie promieniowania w tym kierunku równe  $1/682$  wata na steradian.

Poza siedmioma jednostkami podstawowymi w układzie SI znalazły się (1995) dwie niemianowane *jednostki uzupełniające*:

**Jeden radian [rad]** to kąt płaski równy kątowi między dwoma promieniami koła, wycinającymi z okręgu tego koła łuk o długości równej promieniowi.

**Jeden steradian [sr]** to kąt bryłowy o wierzchołku w środku kuli, wycinający z powierzchni tej kuli pole równe kwadratowi jej promienia.



### 3.5. Stałe fizyczne

Jednostki podstawowe i pochodne definiowane są obecnie na podstawie *zjawisk naturalnych* i uwzględniają pewne stałe współczynniki zwane *stałymi fizycznymi* (zgodnie z koncepcjami praw przyrody uznawanymi za najbardziej niezmiennie).

Jak najdokładniejsze określenie wartości stałych fizycznych jest jednym z zadań metrologii. Ograniczona dokładność wyznaczenia tych stałych wpływa na dokładność jednostek i pomiarów w ogóle.

Wyjątek stanowią tu arbitralnie zdefiniowane wartości niektórych stałych fizycznych. Dokonanie tego w 1983 r. w konsekwencji wymusiło zmianę definicji niektórych jednostek (wśród nich jednostek podstawowych, jak definicja metra).

### 3.6. Zagadnienia kontrolne

Co to jest układ jednostek miar, jednostki podstawowe SI  
Jaka jest rola stałych fizycznych w definiowaniu jednostek miar

## 4. Wzorce jednostek miar

### 4.1. Wzorce – pojęcia podstawowe

**Wzorce jednostek miar** są narzędziami lub układami pomiarowymi przeznaczonymi do *realizacji, zachowania lub przekazywania* (odtwarzania) jednostki miary lub jej wielokrotności.

Wzorzec jednego kilograma pełni też rolę definicyjną w układzie SI.

Wzorce budowane są jako *jednostkowe* lub *zespolowe*.

**Wzorce zespolowe** (grupowe) jednostek miary budowane są jako zespoły wzorców stosowanych wspólnie.

Wzorce mogą mieć rangę *międzynarodową* lub *krajową*.

**Wzorzec międzynarodowy** to wzorzec jednostki miary uznany na mocy umowy międzynarodowej za podstawę do przypisania wartości innym wzorcom tej jednostki.

**Wzorzec państwowy** to wzorzec urzędowo uznany w danym kraju za podstawę do przypisania wartości innym wzorcom tej jednostki.

Wzorce dzieli się ze względu na przenoszenie wartości ze wzorców dokładniejszych na wzorce mniej dokładne. Główny podział obejmuje *wzorce pierwotne* (etalony) i *wzorce wtórne*.

**Wzorzec pierwotny lub etalon** to wzorzec, który jest powszechnie uznany za cechujący się najwyższą jakością metrologiczną i którego wartość przyjmowana jest bez odnoszenia do innych wzorców tej jednostki.

**Wzorzec wtórny** to taki, któremu wartość została przekazana w procesie porównania ze wzorcem pierwotnym tej jednostki.

Do wzorców wtórnych należą *wzorce odniesienia* i *wzorce robocze*.

**Wzorzec odniesienia** to wzorzec jednostki miary o najwyższej jakości metrologicznej w danym miejscu lub danej organizacji, stanowiący odniesienie do wykonywanych tam pomiarów.

**Wzorzec roboczy** to wzorzec jednostki miary używany do wzorcowania lub sprawdzania przyrządów pomiarowych.

### 4.2. Rodzaje wzorców

Biorąc pod uwagę różne kryteria związane z budową i działaniem wzorców, można je podzielić na:

- stałe i regulowane,
- aktywne (źródła energii) i pasywne (zasilane),
- naturalne (np. czasu, temperatury) i sztuczne (np. masy, natężenia prądu, światłości).

### 4.3. Właściwości wzorców

Podstawowe **parametry** charakteryzujące wzorzec to:

- wartość nominalna miary  $W_N$ ,
- niedokładność miary wzorca  $\Delta W$ ,
- okres zachowywania określonej niedokładności,
- warunki, w których miara wzorca i jej niedokładność są zachowane.

Ostatecznie wartość prawdziwą wzorca  $W_0$  można opisać jako:  $W_0 = W_N \pm \Delta W$

Do podstawowych **wymagań** stawianych wzorcom zalicza się:

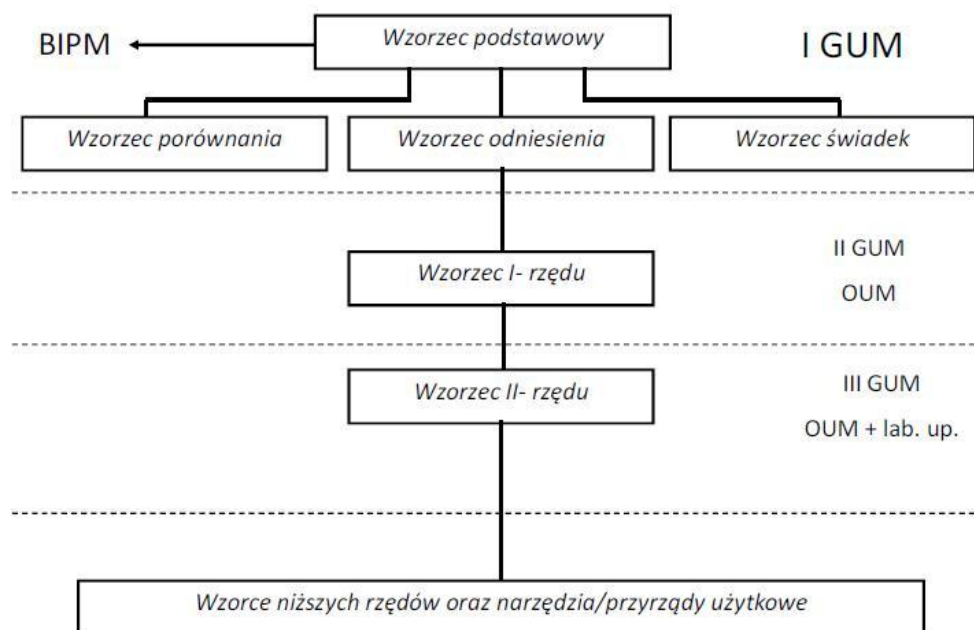
- dużą dokładność,
- niezmienność w czasie,
- łatwą odtwarzalność,
- łatwą porównywalność,
- łatwość stosowania,
- małą zależność od zewnętrznych wielkości wpływających.

### 4.4. Hierarchia wzorców

Utrzymywanie wartości jednostki miary i przekazywanie jej wzorcom wtórnym wymaga stosowania odpowiednich narzędzi pomiarowych oraz prawnie ustalonych procedur – systemów **sprawdzania wzorców** (*sprawdzania narzędzi pomiarowych*).



Powyższe zasady powodują, że wzorce można uporządkować w pewnej **hierarchii**, zwanej też *piramidą wzorców*.



**Wzorzec podstawowy** najczęściej realizowany jest jako wzorzec zespołowy (wtedy wykorzystywana jest wartość uśredniona), a jego wartość ustala się w wyniku porównania ze wzorcem międzynarodowym. Służy do ustalania wartości *wzorców porównania* i *odniesienia*.

**Wzorzec świadek** służy do kontroli wzorca podstawowego lub do zastąpienia go w przypadku awarii (normalnie nie jest używany). Jego właściwości metrologiczne są analogiczne do właściwości wzorca podstawowego.

**Wzorce porównania** służy do komparacji międzynarodowych oraz porównań z innymi wzorcami, które nie mogą być porównywane bezpośrednio.

**Wzorzec odniesienia** wykorzystywany jest do przekazywania swojej wartości na wzorce niższego rzędu.

Wymienione powyżej cztery wzorce tworzą *państwowy wzorzec jednostki miary*, stanowiący *pierwszy poziom hierarchiczny*. Większość z nich znajduje się w GUM w Warszawie

Depozytariuszem państwowego wzorca jednostki miary temperatury dla zakresu od 13,8033 K do 273,16 K jest Instytut Niskich Temperatur i Badań Strukturalnych PAN we Wrocławiu.

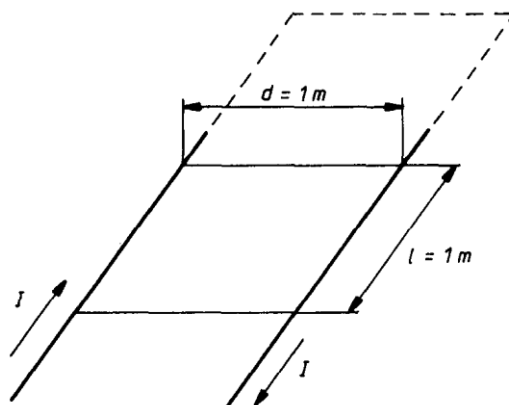
*Drugi poziom hierarchiczny* tworzą wzorce I-rzędu, które znajdują się w GUM i Okręgowych Urzędach Miar (OUM).

*Trzeci poziom hierarchiczny* tworzą wzorce II-rzędu, które znajdują się w Okręgowych i Obwodowych Urzędach Miar oraz laboratoriach upoważniających. Biorą one bezpośredni udział w procesach pomiarowych. Z nimi porównywane są wzorce i narzędzia pomiarowe znajdujące się u użytkowników.

## 4.5. Wzorce wielkości elektrycznych, częstotliwości i czasu

### 4.5.1. Wzorzec natężenia prądu

Zgodnie z definicją *jednego ampera*, wzorzec tej jednostki powinien być skonstruowany w poniższy sposób.

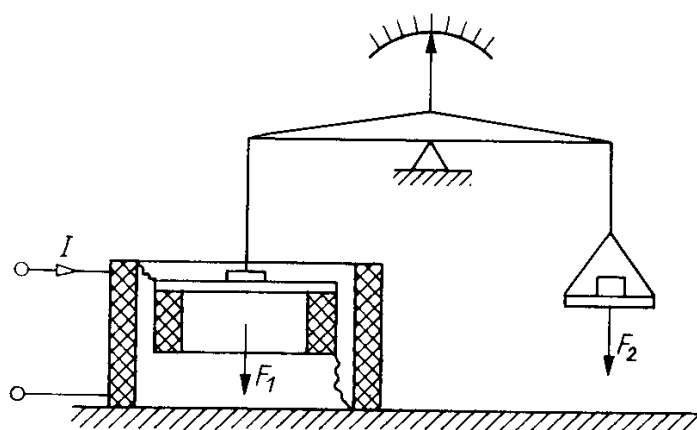


Wtedy siła  $F$  indukująca się między przewodami wynosi:

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 \frac{l}{d},$$

gdzie  $I$  to wzorcowe natężenie prądu, a  $d$  to odległość między przewodami.

Ponieważ konstrukcja wzorca w pełni zgodna z definicją jest niemożliwa, wzorzec *pierwotny* natężenia prądu buduje się z wykorzystaniem analogicznego prawa fizycznego oddziaływania mechaniczno-elektrycznego w postaci *wagi prądowej* osiągającej *niedokładność względną* rzędu  $10^{-6}$ .



W *wadze prądowej* siła  $F_1$  powstająca w dwóch współosiowych solenoidach przez które płynie prąd  $I$  równoważona jest przez siłę grawitacji  $F_2$  oddziałującą na masę  $m$ :

$$F_1 = a_k \cdot I^2 = F_2 = mg \Rightarrow I = \sqrt{\frac{mg}{a_k}}.$$

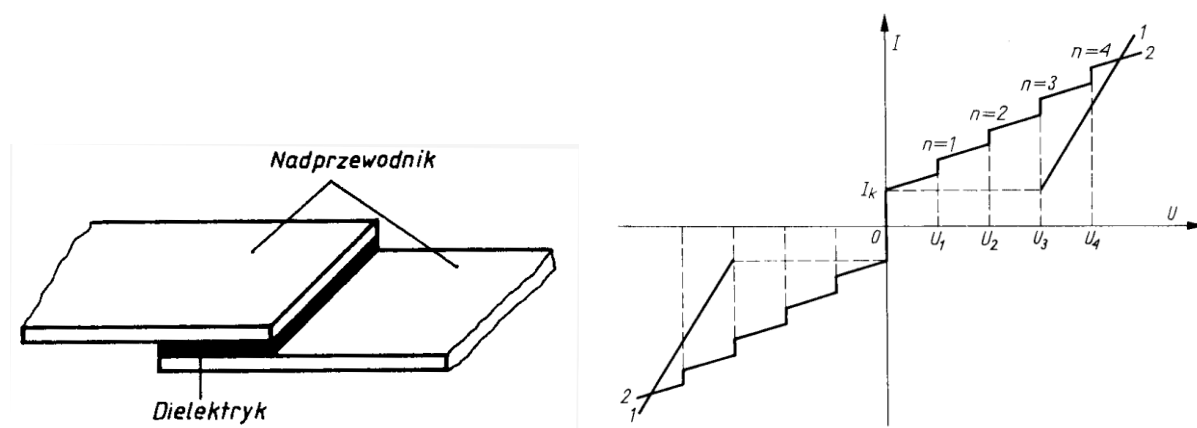
Do popularnych wzorców użytkowych natężenia prądu należą:

- kalibratory elektroniczne,
- wzorce pośrednio odtwarzające wartość prądu z wykorzystaniem prawa Ohma oraz wzorców napięcia i rezystancji ( $I_N = U_N / R_N$ ).

### 4.5.2. Wzorzec napięcia

Niepowodzeniem zakończyły się próby zbudowania wystarczająco dokładnego wzorca napięcia w oparciu o prawo Ohma. Przez długi okres czasu jako wzorzec wykorzystywana ogniwo elektrochemiczne Westona.

Przełomowym momentem okazało się odkrycie naturalnego zjawiska napięciowego o charakterze kwantowym, prawie nie podlegającego wpływom otoczenia – zjawiska Josephsona (odkrytego przez B. Josephsona – Nagroda Nobla 1973). Zachodzi ono w strukturze Josephsona w temperaturze ciekłego helu.



W charakterystyce napięcie-prąd złącza Josephsona umieszczonego w polu elektromagnetycznym (e-m) wielkiej częstotliwości pojawiają się skokowe zmiany prądu (numerowane liczbami naturalnymi  $n = 1, 2, \dots$ ) występujące przy ściśle określonych napięciach  $U_J$  danych wzorem:

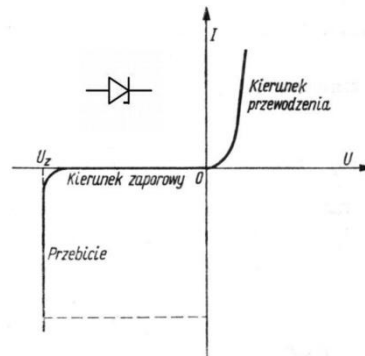
$$U_J(n) = \frac{nf}{2e/h} = \frac{nf}{K_f},$$

gdzie  $f$  oznacza częstotliwość pola e-m,  $e$  to ładunek elektryczny elektronu, a  $h$  jest stałą Plancka.

Napięcie pojedynczego złącza wynosi ok. 1 mV, dlatego też używa się zestawu złącz w liczbie ok. 20000. Tak zbudowany wzorzec regulowany charakteryzuje się niedokładnością względną na poziomie  $10^{-10}$ .

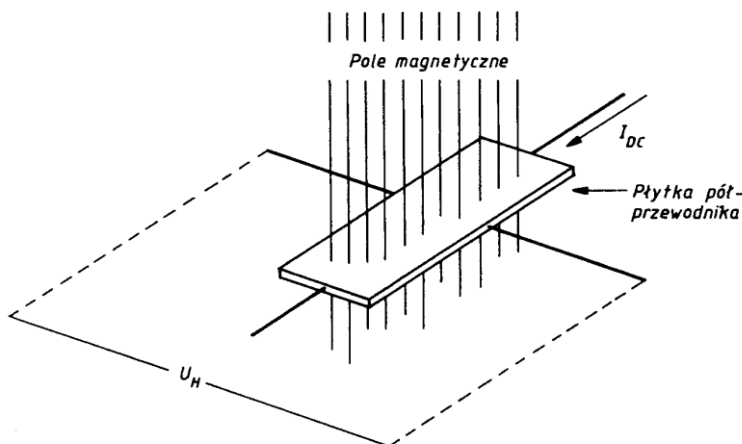
Do popularnych wzorców użytkowych napięcia należą:

- kalibratory elektroniczne,
- elektroniczne wzorce napięcia z diodami Zenera (osiągające niedokładność rzędu  $10^{-5}$ )



### 4.5.3. Wzorzec rezystancji

Do budowy wzorca rezystancji również wykorzystuje się zjawisko kwantowe – efekt Halla, pojawiający się w nadprzewodniku (półprzewodnik w temperaturze ciekłego helu) umieszczonym w stałym polu magnetycznym 12.6 T. Jego niedokładność jest rzędu  $10^{-8}$ .



Przepływający przez nadprzewodnik prąd stały  $I_{DC}$  wywołuje powstanie napięcia poprzecznego  $U_H$  o wartości:

$$U_H = \frac{h/e^2}{n} I_{DC}.$$

Daje to (pasywny) wzorzec rezystancji o wartości:

$$R_H = \frac{U_H}{I_{DC}} = \frac{h/e^2}{n} = \frac{R_K}{n},$$

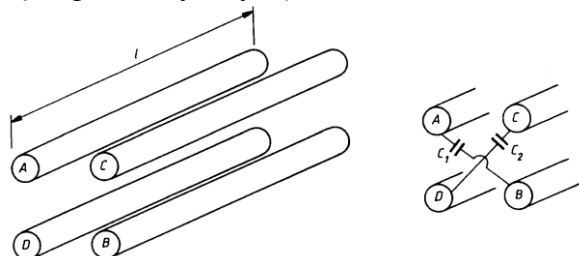
gdzie  $R_K = 25,812807 \text{ k}\Omega$ .

Wzorce użytkowe rezystancji buduje się jako rezystory normalne (stałe) i dekadowe bardzo starannie wykonane z drutu oporowego, lub niskoomowe rezystory czterozaciskowe.



#### 4.5.4. Wzorzec pojemności

Wzorzec ten buduje się jako *cewkę liczącą* (czyli o takiej konstrukcji, której pojemność można obliczyć wychodząc z praw fizycznych).



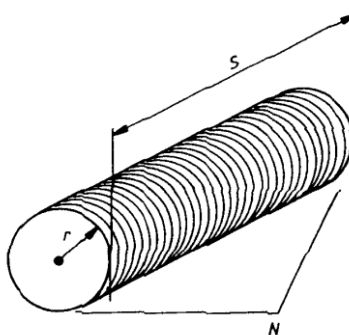
Wtedy wartość pojemności  $C$  wynosi:

$$C = \epsilon_0 l \frac{\ln 2}{\pi} = 10^7 \frac{\ln 2}{4\pi^2} \frac{l}{c^2} = 1.95 \text{ pF/m}$$

Wzorce użytkowe pojemności konstruowane są w postaci *kondensatorów powietrznych stałe i dekadowych*.

#### 4.5.5. Wzorzec indukcyjności

Wzorzec indukcyjności, podobnie jak w przypadku wzorca pojemności, budowany jest jako cewka licząca, która osiąga niedokładność  $10^{-6}$ .



Zgodnie z zasadami fizyki, indukcyjność takiej cewki wynosi

$$L = \frac{4\pi^2 10^{-7} N^2 r^2}{S}.$$

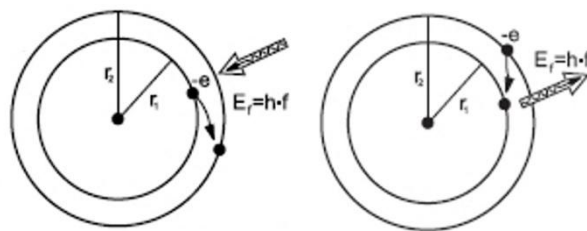
Wzorce użytkowe indukcyjności budowane są jako nawijane *cewki indukcyjne*, a w niektórych zastosowaniach wykorzystane są *wzorcowe kondensatory*.

### 4.5.6. Wzorce częstotliwości i czasu

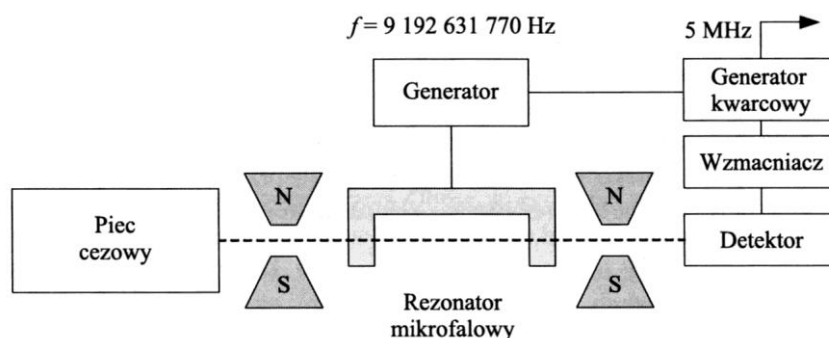
Przejście elektronu pomiędzy dwoma poziomami energetycznymi w atomie jest zjawiskiem kwantowym i towarzyszy mu emisja fali elektromagnetycznej o ściśle określonej częstotliwości (związanej z wyemitowaną porcją energii  $E_2 - E_1$ ):

$$E_2 - E_1 = hf,$$

gdzie  $f$  to częstotliwość wyemitowanej fali.



Zjawisko to wykorzystywane jest do konstrukcji *wzorca częstotliwości*. Nazywany jest on wzorcem atomowym. We wzorcach pierwotnych stosowane są atomy cezu (*cezowy wzorzec częstotliwości*) emitujące fale o częstotliwości 9.192 631 770 GHz. Budowane wzorce cechuje niedokładność rzędu  $10^{-13}$ , zatem są one najdokładniejszymi z budowanych obecnie wzorców.



Bardzo popularnymi, zwłaszcza w elektronicznych urządzeniach cyfrowych, *użytkowymi wzorcami częstotliwości* są układy *generatorów kwarcowych*. Ich niedokładność względna jest rzędu  $10^{-6} - 10^{-8}$ .

Częstotliwość wzorcowa rozpowszechniana może być drogą radiową.

W oparciu o wzorzec częstotliwości buduje się *wzorce odcinka czasu* o podobnej dokładności. Okresy sygnału częstotliwościowego zliczane są w nich za pomocą liczników cyfrowych.

## 4.6. Zagadnienia kontrolne

Podstawowe rodzaje wzorców

Jak funkcjonuje hierarchia wzorców

Jak realizowane są wzorce pierwotne wielkości elektrycznych, częstotliwości i czasu

## 5. Aspekty prawne metrologii

### 5.1. Główne obszary działań metrologicznych

Istnieje wiele przyczyn zawiązanej i rozwijanej współpracy międzynarodowej w dziedzinie metrologii. Należą do nich przede wszystkim przesłanki naukowe i gospodarcze. Z tego też powodu kraje rozwinięte gospodarczo przyjęły odpowiednie rozwiązania prawne i powołały instytucje krajowe, a następnie międzynarodowe.

Powstałe organizacje zajmują się *metrologią naukową* i *metrologią prawną*. Można też wyróżnić jeszcze jeden obszar ich działalności – *metrologię przemysłową*.

**Metrologia naukowa** rozwijana jest poprzez prace badawcze i rozwojowe. Głównymi obszarami jej zainteresowania są:

- modyfikacja definicji jednostek miar,
- konstrukcja wzorców jednostek miar,
- metody utrzymywania i kontroli wartości wzorców,
- metody przekazywania wartości wzorców,
- metody pomiarów,
- metody analizy wyników pomiarów.

**Metrologia prawna** zajmuje się przede wszystkim:

- zatwierdzaniem legalnych jednostek miar i państwowych wzorców jednostek miar,
- kontrolą przyrządów pomiarowych, których wskazania mają skutki prawne (i finansowe), stosowanych m.in. w ochronie zdrowia, ochronie środowiska, wymianie handlowej, nadzorowaniu przestrzegania prawa itd.,
- określaniem kompetencji i zadań organów administracji rządowej właściwych w sprawach miar (wraz z organizacją ich infrastruktury),
- sprawowania nadzoru nad wykonywaniem przepisów prawnych.

Podstawowe w Polsce akty prawne i zalecenia to:

- ustawa *Prawo o miarach* z 2001 r. z późniejszymi zmianami,
- *Międzynarodowy słownik terminów metrologii prawnej* (wyd. polskie: GUM, Warszawa 2002),
- *Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik* (wyd. polskie: GUM, Warszawa 1999).

**Metrologia przemysłowa** zajmuje się usługami metrologicznymi w obszarze działalności przemysłowej, w tym:

- wzorcowaniem fabrycznych przyrządów pomiarowych,
- zatwierdzaniem typów przyrządów pomiarowych stosowanych przez producenta.

### 5.2. Wybrane regulacje prawne ustawy *Prawo o miarach*

Celem ustawy jest zapewnienie *jednolitości miar* i wymaganej *dokładności pomiarów* wielkości fizycznych w Rzeczypospolitej Polskiej.

**Ustawa reguluje** następujące zagadnienia (Art. 2):

- legalnych jednostek miar i państwowych wzorców jednostek miar,
- prawnej kontroli metrologicznej przyrządów pomiarowych,
- kompetencji i zadań organów administracji rządowej właściwych w sprawach miar,
- sprawowania nadzoru nad wykonywaniem przepisów ustawy.

Ustawa precyzuje podstawowe terminy z zakresu metrologii prawnej (Art. 2).

**Prawna kontrola metrologiczna** – działanie zmierzające do wykazania, że przyrząd pomiarowy spełnia wymagania określone we właściwych przepisach.

**Badanie typu** – zespół czynności mających na celu wykazanie, czy przyrząd pomiarowy danego typu spełnia wymagania, i stanowiących podstawę zatwierdzenia typu.

**Zatwierdzenie typu** – potwierdzenie, w drodze decyzji, że typ przyrządu pomiarowego spełnia wymagania.

**Legalizacja** – zespół czynności obejmujących sprawdzenie, stwierdzenie i poświadczenie dowodem legalizacji, że przyrząd pomiarowy spełnia wymagania.

**Wzorcowanie** – czynności ustalające relację między wartościami wielkości mierzonej wskazanymi przez przyrząd pomiarowy a odpowiednimi wartościami wielkości fizycznych, realizowanymi przez wzorzec jednostki miary.

**Prawnej kontroli metrologicznej podlegają przyrządy pomiarowe**, stosowane:

- w ochronie zdrowia, życia i środowiska;
- w ochronie bezpieczeństwa i porządku publicznego;
- w ochronie praw konsumenta;
- przy pobieraniu opłat, podatków i niepodatkowych należności budżetowych oraz ustalaniu opustów, kar umownych, wynagrodzeń i odszkodowań, a także przy pobieraniu i ustalaniu podobnych należności i świadczeń;
- przy dokonywaniu kontroli celnej;
- w obrocie.

### 5.3. Zachowanie spójności pomiarowej

Na **spójność pomiarową** składa się sześć podstawowych elementów:

- nieprzerwany łańcuch porównań,
- *niepewność pomiaru*,
- dokumentacja,
- kompetencje,
- odniesienie do *jednostek układu SI*,
- odstępy czasu między *wzorcowniami*.

Zapewnienie spójności pomiarowej wymaga zachowania następujących zasad:

- wyposażenie pomiarowe stosowane do wzorcowań, badań i inspekcji, mające istotny wpływ na niepewność pomiaru związana z wynikami tych działań, powinno być wzorcowane przez krajową instytucję metrologiczną (GUM) albo przez akredytowane laboratoria wzorcujące;
- wzorce odniesienia akredytowanych laboratoriów wzorcujących powinny być wzorcowane w GUM lub akredytowanych laboratoriach wzorcujących o odpowiedniej najlepszej możliwości pomiarowej;

- jeżeli GUM oraz krajowe akredytowane laboratoria wzorcujące nie mogą zapewnić spójności pomiarowej w danej dziedzinie (brak stosownych odniesień), źródłem spójności pomiarowej może być instytucja metrologiczna kraju, który jest sygnatariuszem odpowiednich umów, lub laboratoria wzorcujące akredytowane w tych krajach;
- jeżeli powiązanie z wzorcami państwowymi jednostek miar jest niemożliwe do uzyskania lub nieracjonalne w konkretnym przypadku, to można zastosować uzgodnione wzorce (lub metody), jednoznacznie opisane i zaakceptowane przez wszystkie uczestniczące strony;
- certyfikowane materiały odniesienia należy traktować tak, jak inne wzorce jednostek miar i stosować podane wyżej zasady.

## 5.4. Międzynarodowe organizacje metrologiczne

Międzynarodowe organizacje metrologiczne określają sposoby postępowania i koordynują starania państw członkowskich w celu określenia wspólnych procedur pomiarowych oraz regulacji prawnych. Efektem ich działania jest m.in. wzajemne uznanie posiadanych wzorców jednostek miar oraz potwierdzenia kompetencji laboratoriów.

Przynależność do międzynarodowych organizacji metrologicznych umożliwia uczestniczenie w ustanowieniu przepisów, udział we wzorcowniach i porównaniach międzynarodowych, uczestnictwo we wspólnych programach oraz doskonalenie państwowych wzorców jednostek.

**Konwencja Metryczna** (*Convention du Mètre*) podpisana w 1975 r. skupia obecnie 54 państwa członkowskich (w tym Polskę od 1925 r.) oraz 32 państwa stowarzyszone zobowiązuje m.in. do stosowania układu SI.

W ramach Konwencji krajowe opracowania metrologiczne są weryfikowane, dyskutowane i następnie przyjmowane jako wspólne ustalenia. Obecnie jej celem jest doskonalenie systemu metrycznego oraz osiągnięcie spójności pomiarowej (m.in. przez porównania wzorców oraz zawieranie porozumień przez kraje członkowskie w sprawie wzajemnego uznawania wzorców jednostek miar oraz świadectw wzorcowania i pomiarów wydawanych przez krajowe instytucje metrologiczne).

**Generalna Konferencja Miar** (CGPM – *Conférence générale des poids et mesures*) jest najwyższym organem Konwencji Metrycznej, który zbiera się co cztery lata.

**Międzynarodowe Biuro Miar i Wag** (BIPM – *Bureau international des poids et mesures*) jest instytucją naukową utworzoną i finansowaną przez sygnatariuszy Konwencji, zajmującą się ujednolicaniem jednostek miar poprzez organizację porównań krajowych standardów pomiaru i przeprowadzanie kalibracji w państwach członkowskich oraz prowadzi badania naukowe nad doskonaleniem wzorców i metod ich odtwarzania i porównywania.

BIPM przechowuje międzynarodowe wzorce jednostek miar. Znajdujące się w nim laboratoria metrologiczne są na najwyższym światowym poziomie.

**Międzynarodowa Organizacja Metrologii Prawnej** (OIML – *Organisation internationale de metrologie legale*) powstała w 1955 r. i skupia 59 państw, a członkami korespondentami są 54 państwa. Zalecenia OIML dotyczą m.in.: terminologii, wymagań metrologicznych, wymagań technicznych, metod i sprzętu do wykonywania badań i sprawdzania zgodności z wymaganiami.

Państwa członkowskie OIML wydają „certyfikaty OIML” potwierdzające, że dany typ przyrządu pomiarowego spełnia wymagania zaleceń OIML.

**Europejskie Stowarzyszenie Narodowych Instytutów Metrologicznych** (EURAMET – *European Association of National Metrology Institutes*) jest europejską organizacją metrologiczną koordynującą współpracę pomiędzy narodowymi instytutami metrologicznymi.

Istnieje jeszcze szereg innych międzynarodowych organizacji metrologicznych.

## 5.5. Krajowe instytucje metrologiczne

**Główny Urząd Miar** (GUM) jest instytucją administracji państwowej powołaną po raz pierwszy w 1919 r., a obecnie działającą na mocy ustawy *Prawo o miarach* z roku 2001. Sprawuje nadzór nad administracją miar i administracją probierczą w Polsce. Podstawowym jego zadaniem jest:

- zapewnienie *spójności pomiarowej*,
- utrzymanie państwowych wzorców miar,
- zapewnienie wzajemnej zgodności i określonej dokładności wyników pomiarów przeprowadzanych w Polsce,
- kontrola nad zgodnością pomiarów krajowych z *układem SI*.

**Polskie Centrum Akredytacji** (PCA) zajmuje się zapewnieniem *spójności pomiarowej* w kraju.

**Komitet Metrologii i Aparatury Naukowej PAN** jest organem zajmującym się konsolidacją krajowego środowiska naukowców zajmujących się metrologią, pełniącym rolę opiniotwórczą oraz propagującym osiągnięcia metrologii.

Poza tym w Polsce funkcjonuje kilka krajowych stowarzyszeń o charakterze metrologicznym.

## 5.6. Zagadnienia kontrolne

Obszary zainteresowań metrologii prawnej

Grupy przyrządów pomiarowych podlegającej prawnej kontroli metrologicznej

## 6. Metody pomiarowe

### 6.1. Pojęcia podstawowe

**Metoda pomiaru** to sposób porównania wielkości mierzonej z wielkością wzorcową.

**Wynik pomiaru** (wskazanie przyrządu)  $x_{zm}$  zależy nie tylko od *prawdziwej wartości* wielkości mierzonej  $x_0$ , ale też od zastosowanej metody pomiarowej i właściwości metrologicznych przyrządu.

Pomimo wielkiej liczby przyrządów pomiarowych istnieje tylko kilka podstawowych *metod pomiaru*. Można je podzielić na dwie grupy: *metody bezpośrednie* i *metody pośrednie*.

### 6.2. Bezpośrednie metody pomiaru

**Metoda bezpośrednia** to taka, w której *wielkość porównywana* i *wzorcowa* są tego samego rodzaju, a *wynik pomiaru* podawany jest w jednostkach wielkości mierzonej.

Metody bezpośrednie również można podzielić na dwie grupy: *metody wychyłowe* oraz *metody zerowe*.

#### 6.2.1. Metody wychyłowe

*Metody wychyłowe* cechują się zmianą położenia elementu wychyłowego pod wpływem przyłożenia *wielkości mierzonej* o wartość powiązaną z wartością mierzoną. Zaliczamy do nich metodę *klasyczną* oraz *różnicową*.

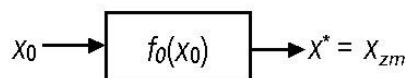
**Metoda wychyłowa klasyczna** pozwala odczytać wartość  $x_{zm}$  wielkości mierzonej na podstawie pewnego wskazanego miejsca  $x^*$  na *skali* (tj. w uporządkowanym zbiorze wartości tej wielkości). Miejsce to wyróżnione jest przez element wskazujący.

*Element wychyłowy* wykorzystuje wybrane zjawisko fizyczne (*zasadę pomiaru*), które pozwala przetworzyć badaną wielkość na przemieszczenie mechaniczne (np. rozciągnięcie sprężyny w wadze sprężynowej pod wpływem masy i pola grawitacyjnego).

*Skala* powstaje na etapie wzorcowania danego typu przyrządów przez producenta z wykorzystaniem posiadanych przez niego *wzorców roboczych*. Odgrywa ona ważną rolę, gdyż w tego typu przyrządach pomiarowych nie wbudowuje się wzorców, a jedynie przenosi ich wartość właśnie na skalę.

Warunkiem pomiaru *metodą klasyczną* jest to, że *wartość mierzona* mieści się w zakresie obejmowanym przez *skalę* przyrządu.

Metodę klasyczną można zobrazować posługując się poniższym schematem blokowym.



Wartość prawdziwa mierzonej wielkości przetwarzana jest w pewien (prawdziwy, ale znany tylko z dobrym przybliżeniem) sposób dając wskazanie  $x^*$ , które jednocześnie jest wynikiem pomiaru  $x_{zm}$ . Matematycznie można to ująć następująco:

$$x^* = f_0(x_0) = f_m(x_0) + \Delta x,$$

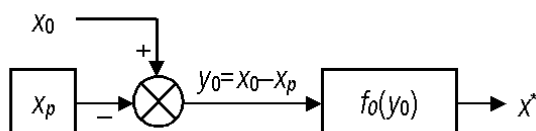
$$x_{zm} = x^*,$$

gdzie  $f_m$  oznacza znany nam opis (tzw. *model*) prawdziwego, ale nieznanego przetworzenia wielkości mierzonej, a  $\Delta x$  jest *błędem pomiaru* (pojęcie to zdefiniowane będzie później) wynikającym z różnicy między  $f_0$  i  $f_m$ .

Najczęściej przyrządy wychyłowe buduje się tak, by spełniona była zależność liniowa, najlepiej tożsamościowa:

$$f_m(y) = a_1 \cdot y + a_0 \Big|_{a_1=1, a_0=0} = y.$$

**Metoda wychyłowa różnicowa** jest modyfikacją metody klasycznej przenoszącą wynik pomiaru na wielokrotnie mniejszy zakres. Idea pomiaru polega na tym, aby pokrywając znaczną część wartości wielkości mierzonej wartością porównawczą  $x_p$ , mierzyć jedynie (miernikiem wychyłowy) pozostającą różnicę.



W skład przyrządu pomiarowego wchodzi wtedy następujące elementy:

- źródło wielkości porównawczej o wartości  $x_p$ ,
- układ różnicowy realizujący operację odejmowania,
- element wychyłowy.

W tak zrealizowanej metodzie pomiaru zachodzą następujące zależności:

$$x^* = f_0(x_0 - x_p) = f_m(x_0 - x_p) + \Delta x,$$

$$x_{zm} = x^* + x_p.$$

Na dokładność pomiaru metodą wychyłową różnicową, która jest większa niż w miernikach klasycznych, wpływ mają:

- dokładności zrealizowanego odwzorowania  $f_m$  w stosunku do  $f_0$ ,
- dokładność wytworzenia  $x_p$ .



### 6.2.2. Metody zerowe

Istotą *metod zerowych* jest to, że różnicę wartości dwóch wielkości: mierzonej i wzorcowej doprowadza się do zera poprzez regulację wartości wzorcowej (*proces równoważenia*). Równoważenie wykrywane jest przez detektor, który generuje sygnał kończący pomiar (tj. równoważenie).

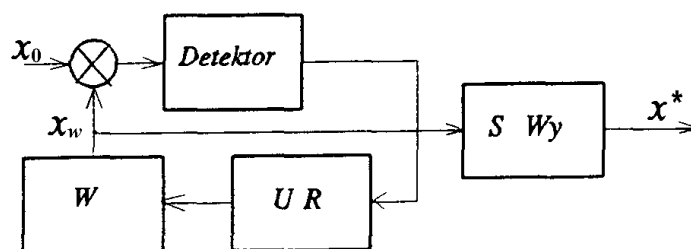
*Metody zerowe* mają trzy ważne zalety w porównaniu z *wychyłowymi*:

- po zrównoważeniu przyrząd pomiarowy nie pobiera energii ani z badanego obiektu, ani ze wzorca,
- istnieje możliwość bezpośredniego stosowania wzorców o wartości  $x_w$  jako elementów wbudowanych w przyrząd (m.in. stąd największa dokładność tych metod),
- wyeliminowane są błędy związane ze zmianami wielkości wpływających, które tak samo oddziałują na wielkość mierzoną i wzorcową.

Dodatkowym elementem wpływającym na niedokładność pomiaru (poza niedokładnością wzorca) jest próg nieczułości detektora (różnica między  $x_0$  a  $x_w$  mniejsza niż pewna wartość progowa jest przez detektor niezauważana).

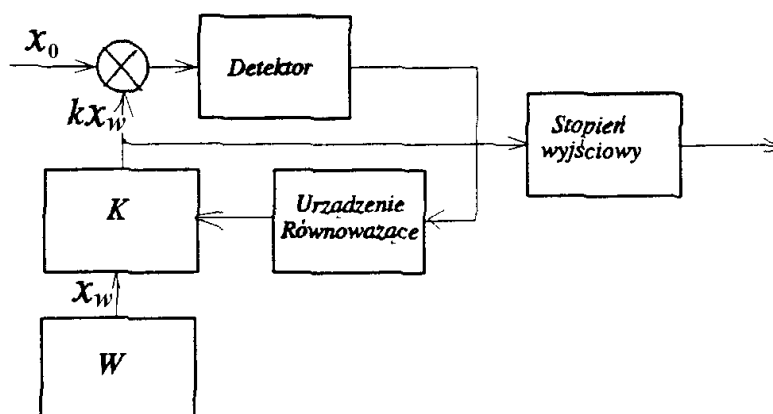
Metody zerowe realizuje się na trzy sposoby, jako metodę *kompensacyjną*, *komparacyjną* lub *podstawieniową* (funkcjonują też inne nazwy tych metod).

**Metoda kompensacyjna** cechuje się użyciem wzorca regulowanego. W procesie porównania wartość regulowanego wzorca przeciwdziała wielkości mierzonej i kompensuje jej fizyczne działanie na detektor (po zrealizowaniu operacji porównania za pomocą układu różnicowego). W zależności od znaku i wartości różnicy  $x_0 - x_w$  urządzenie równoważące (UR) zwiększa lub zmniejsza wartość  $x_w$  uzyskiwaną ze wzorca.



Ostatecznie wynik pomiaru można zapisać jako  $x_{zm} = x^* = x_w$ .

**Metoda komparacyjna** cechuje się zastosowaniem wzorca stałego i układu przeskalowującego jego wartość  $x_w$  na  $k \cdot x_w$ . Proces równoważenia podlega zatem na regulacji wartość współczynnika  $k$ .



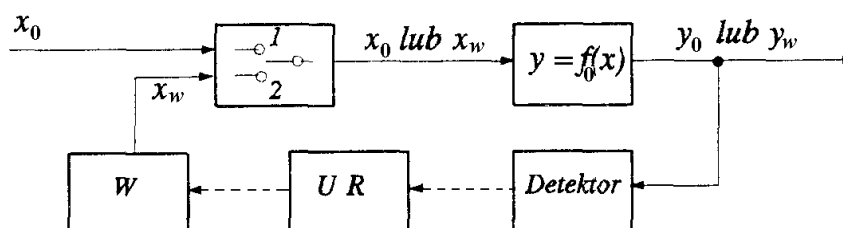
Po zakończeniu procesu równoważenia znana jest wartość  $k$ , zatem:

$$x^* = k,$$

$$x_{zm} = k \cdot x_w = x^* \cdot x_w.$$

**Metoda podstawieniowa** ma kilka cech charakterystycznych:

- porównanie wartości wielkości mierzonej  $x_0$  i wzorcowej  $x_w$  nie jest równoczesne ani bezpośrednie,
- wykorzystuje się dodatkową wielkość  $y$  będącą efektem zjawiska zależnego od badanej wielkości  $x$ ,
- bezpośrednio porównuje się efekty oddziaływania wielkości mierzonej  $x$  i wzorca  $w$ , czyli  $y_x$  i  $y_w$  (tj. wartości tej dodatkowej wielkości fizycznej).



Ważną zaletą metody podstawieniowej jest eliminacja błędów wynikających z niedokładności modelu oddziaływania  $f_m$ , (ilościowa wiedza o postaci  $f_m$  nie jest w ogóle potrzebna), a wadą większa złożoność procedury pomiarowej.

Z warunku uzyskanej w procesie równoważenia równości efektów oddziaływania  $x$  i  $w$  wynika:

$$y_x = y_w \Rightarrow f_0(x_0) = f_0(x_w) \Rightarrow x_{zm} = x^* = x_w.$$

### 6.3. Pośrednie metody pomiaru

**Metoda pośrednia** to metoda, w której wartość wielkości mierzonej wyznacza się na podstawie *bezpośredniego pomiaru* wartości innych wielkości z nią związanych oraz ilościowej postaci tego związku  $f_m$  wyrażonej za pomocą *równania matematycznego* (lub układu równań).

Do obliczenia wyniku pomiaru wykorzystywane są równania typu:

- równanie definicyjne (np. wzór na pole prostokąta),
  - prawo fizyczne (np. ruch ciała w polu grawitacyjnym),
  - model matematyczny tego związku (model badanego obiektu lub zjawiska),
- które ogólnie można zapisać jako:

$$y = f_m(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

gdzie  $y$  to wynik pomiaru pośredniego, a  $x_1, x_2, \dots, x_k$  to wyniki pomiarów bezpośrednich.

**Metoda pośrednia prosta** wymaga wykonania obliczenia, w którym wielkości mierzone bezpośrednio ( $x$ ) są argumentami w zależności funkcyjnej opisującej ich związek z wielkością mierzoną pośrednio ( $y$ ). Związek ten podany jest w sposób jawny.

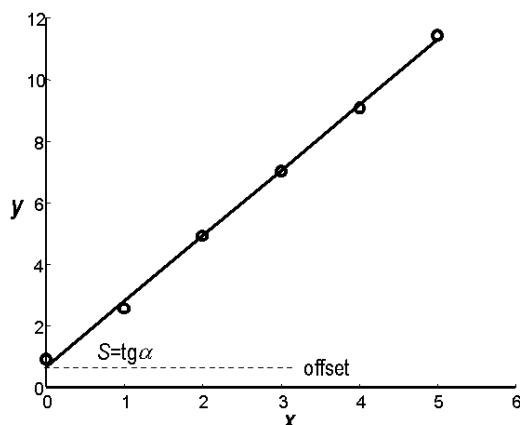
Przykładem może być pośredni pomiar rezystancji  $R$  polegający na bezpośrednim pomiarze prądu  $I$  płynącego przez rezystor i występującego na nim spadku napięcia  $U$ , wykorzystując prawo Ohma:  $R = U/I$

**Metoda pośrednia złożona** polega na takim rodzaju obliczeń, w których uzyskuje się jednocześnie wartości kilku wielkości mierzonych pośrednio. Najczęściej bezpośrednio mierzone są zarówno argumenty zależności matematycznej ( $x$ ) jak i jej wartości ( $y$ ), a obliczane nieznane współczynniki równań (nazywane *parametrami modelu*), które odpowiadają konkretnym właściwościom fizycznym badanego obiektu.

Zazwyczaj obliczenia są na tyle skomplikowane, że wykonuje się je wykorzystując odpowiednie algorytmy numeryczne.

Wartości wielkości mierzonych bezpośrednio wynikają z wartości parametrów modelu matematycznego (właściwości badanego obiektu), można je więc traktować jako skutki, a parametry jako przyczynę. Z tego powodu *pomiary pośrednie złożone* należą do kategorii *zadań odwrotnych* w metrologii (ilościowe wnioskowanie o przyczynach na podstawie skutków).

Jako przykład rozważmy pośredni pomiar pewnych właściwości przetwornika zamieniającego w sposób liniowy pobudzenie (wejście przetwornika)  $x$  na reakcję (wyjście przetwornika)  $y$  zgodnie z równaniem  $y = a_1 x + a_0$ . Do podstawowych parametrów przetworników należą m.in. czułość  $S = dy/dx$  (zmiana wyjścia spowodowana zmianą wejścia) oraz *offset* (wartość wyjścia przy braku pobudzenia). Po zmierzeniu kilku odpowiedzi przetwornika na kilka pobudzeń (rys.) można obliczyć (stosując odpowiednią procedurę numeryczną) współczynniki prostej przez nie przechodzącej (dokładnie – przechodzącej jak najbliżej nich).



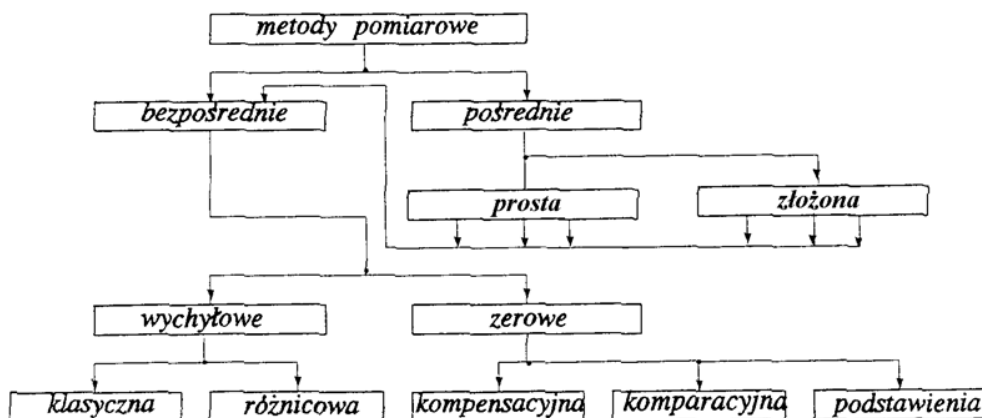
Oznaczając oszacowane w ten sposób wartości współczynników „daszkiem”, łatwo zauważyć (analizując podane równanie), że:

$$S \equiv \hat{a}_1, \quad \text{offset} \equiv \hat{a}_0.$$

Jest to zatem przykład pośredniego pomiaru złożonego dwóch właściwości przetwornika.

## 6.4. Klasyfikacja metod pomiarowych

Pomimo wielości przyrządów pomiarowych, wykorzystują one tylko pięć przedstawionych bezpośrednich metod pomiarowych, będących też podstawą wszystkich metod pośrednich, co pokazano na poniższym schemacie.



## 6.5. Zagadnienia kontrolne

Cechy charakteryzujące poszczególne metody pomiarowe (5 bezpośrednich i 2 pośrednie)

## 7. Dokładność pomiarów

### 7.1. Błąd pomiaru

Z wielu powodów wynik pomiaru odczytywany z przyrządu różni się od wartości prawdziwej wielkości mierzonej, tzn. obarczony jest *błędem pomiaru*. Okazuje się, że stosując powszechnie przyjęte podejście: *definicja – wzorzec – metoda pomiaru* nie da się zbudować bezbłędnie działającego przyrządu pomiarowego.

**Błąd pomiaru**  $\Delta x$  to różnica między wynikiem pomiaru  $x_{zm}$  a prawdziwą wartością  $x_0$  wielkości mierzonej:

$$\Delta x = x_{zm} - x_0.$$

Jego dokładna wartość nigdy nie jest znana, ponieważ znamy jedynie  $x_{zm}$ .

Wprawdzie wartości *błędu pomiaru* nie można obliczyć, można ją jednak *oszacować*. Tradycyjnie ten dział metrologii (i miernictwa) nazywał się *analizą błędów*, a obecnie nosi nazwę *analizy niepewności pomiaru*.

### 7.2. Fizyczne granice dokładności pomiarów

Można wymienić kilka fizycznych źródeł ograniczonej dokładności pomiarów.

Pierwszym z nich jest **zasada nieoznaczoności Heisenberga** i dotyczy próby pomiaru pary wielkości kanonicznie sprzężonych (jak np. położenie i pęd) charakteryzujących ten sam obiekt.

Druga grupa związana jest z **niedokładnością wykonania wzorców**.

W przypadku wzorców pierwotnych pojawiają się dwie istotne przyczyny skutkujące niedokładnością zrealizowanej przez nie wartości:

- budując wzorzec w oparciu o definicję danej *jednostki miary*, należy wykorzystać wartość odpowiedniej stałej fizycznej, a wartości te znamy tylko z ograniczoną dokładnością (poza tymi, które zdefiniowano w 1983 r.);
- zrealizowanie wartości *jednostki miary* zgodnie z jej definicją natrafia na ograniczenia natury technologicznej.

Wzorce wtórne uzyskują swoje wartości poprzez przekazanie im wartości na drodze porównania przez wzorce stojące wyżej w *strukturze hierarchicznej* (ostatecznie przez wzorce pierwotne). W efekcie wzorce wtórne cechują się większą niedokładnością niż wzorce pierwotne, tym większą, im niżej znajdują się w *piramidzie wzorców*.

Z powyższych przesłanek wynika, że:

nie da się skonstruować bezbłędnego wzorca (poza międzynarodowym wzorcem 1 kg – z definicji), zatem wszystkie wykonywana w oparciu o nie pomiary muszą być obarczone błędami.

**Szumy w układach elektronicznych** są trzecią przyczyną niedokładności pomiarów, cechującą jedynie elektroniczną aparaturę pomiarową. Wyróżnia się kilka typowych rodzajów szumów obserwowanych w urządzeniach elektronicznych (w tym w przyrządach pomiarowych).

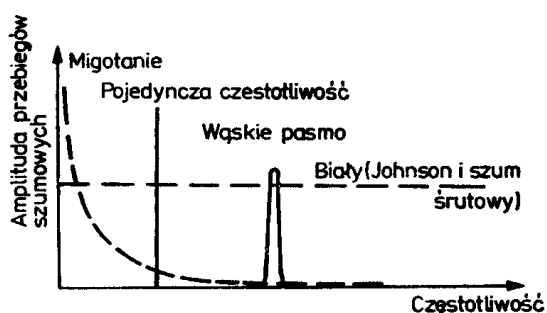
Szumy cieplne (Johnsona) indukują się w przewodnikach, zwłaszcza o dużych rezystancjach  $R$ . Mają one charakter szumu białego (tj. równoenergetycznego i szerokopasmowego). Ich energia (dana przez kwadrat napięcia skutecznego  $u_{sk}$ ) jest proporcjonalna do temperatury ( $T$ ), rezystancji przewodnika ( $R$ ) oraz szerokości widma szumu ( $W$ ), gdzie  $k$  to stała gazowa. Ich źródłem są ruchy termiczne materii.

$$u_{sk}^2 = 4kTRW.$$

Szum prądowy (zwany też śrutowym) obserwowalny jest przy małych natężeniach prądu i wynika z korpuskularnego charakteru prądu. Jest to również typ szumu białego o energii (danej przez kwadrat wartości skutecznej prądu  $i_{sk}$ ) zależnej od natężenia prądu ( $I$ ) i szerokości widma:

$$i_{sk}^2 = 2eIW.$$

Szum migotania (określany też jako *hiperboliczny*) jest trzecim z podstawowych rodzajów szumów spotykanych w układach elektronicznych. Jego pochodzenie nie zostało zidentyfikowane, a energia rozkłada się hiperbolicznie w dziedzinie częstotliwości.



Szumy manifestujące się w elektronicznej aparaturze pomiarowej maskują prawdziwe wartości mierzonych wielkości (tzn. wartości te "giną" w nieregularnym sygnale szumu), co w efekcie prowadzi do sytuacji, w której nawet przy bezbłędnym dostępie przyrządu do wartości prawdziwej, nie byłby on w stanie bezbłędnie określić tej wartości.

### 7.3. Systemy klasyfikacji błędów pomiarowych i ich oszacowań

W tradycyjnym podejściu do *analizy błędów pomiaru*, biorąc pod uwagę dostępne informacje oraz zaobserwowaną naturę popełnianych błędów, dokonano ich podziału na *błędy systematyczne* i *przypadkowe*.

W pierwszym przypadku opracowano procedury wyznaczania przedziału wartości, w którym z pewnością miała się mieścić wartość prawdziwa. Podejście takie nazwiemy *deterministycznym*.

W przypadku drugim, wykorzystując aparat matematyczny rachunku prawdopodobieństwa i statystyki, nauczono się wyznaczać przedział wartości, w którym wartość prawdziwa powinna się mieścić z zadanyam prawdopodobieństwem. To podejście nazwiemy *probabilistycznym*.

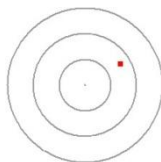
W roku 1993 Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna (ISO) przyjęła dokument ujednolicający analizę dokładności pomiarów. Obszarem jego zastosowania jest praktyka inżynierska, co staje się coraz bardziej istotne przy postępującym procesie rozwoju technologicznego i globalizacji. W podejściu tym określana jest *niepewność pomiaru*.

Ostatecznie używa się terminu *błąd pomiaru* na określenie różnicy między  $x_{zm}$  i  $x_0$ , ale ponieważ jego wartość nie jest znana, nie znajduje on zastosowania w praktyce inżynierskiej (używane jest za to w *metrologii naukowej*). Jednocześnie w praktycznej analizie dokładności pomiarów stosuje się podejście polegające na wyznaczeniu ich *niepewności*.

### 7.4. Deterministyczna interpretacja niedokładności pomiaru

**Błąd systematyczny** to błąd, który przy każdym pomiarze tego samego stanu mierzonej wielkości w tych samych warunkach (ten sam przyrząd i układ pomiarowy) ma zdeteminowaną wartość (stałą lub określoną wzorem).

Wyidealizowanym przykładem może być sytuacja wielokrotnego strzału do tarczy z każdorazowym trafieniem w ten sam punkt poza jej centrum.



Tak rozumiane błędy systematyczne pojawiają się w *miarach bezpośrednich* i w konsekwencji również w *miarach pośrednich*.

Do podstawowych **źródeł błędów systematycznych w pomiarach bezpośrednich** można zaliczyć:

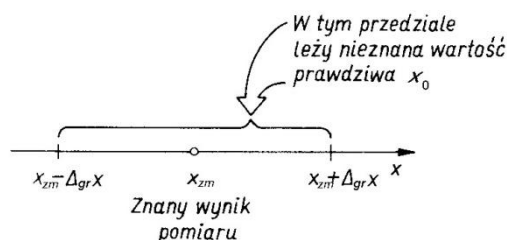
- błąd wzorcowania skali pomiarowej (w metodach wychyłowych),

- różnicę między wartością nominalną a prawdziwą wzorca (w metodach zerowych),
- przybliżoną znajomość charakterystyki przetwarzania nośnika informacji w przyrządzie pomiarowym (różnica między  $f_m$  i  $f_0$ ).

Natomiast do podstawowych **źródeł błędów systematycznych w pomiarach pośrednich** można zaliczyć:

- błędy systematyczne pomiarów bezpośrednich,
- uproszczony charakter opisu matematycznego wyrażającego związek między wynikiem pomiaru pośredniego i pomiarami bezpośrednimi (wynikająca stąd niedokładność pomiaru pośredniego nazywana jest *błędem metody*).

**Błąd graniczny**  $\Delta_{gr}$  jest deterministycznym *oszacowaniem* błędu systematycznego pomiaru bezpośredniego. Określa on przedział wartości, w którym z pewnością leży wartość prawdziwa mierzonej wielkości (zatem wartość  $\Delta_{gr}$  jest równa lub większa niż wartość błędu systematycznego).



Matematycznie tę własność można zapisać następująco:

$$x_{zm} - \Delta_{gr}x \leq x_0 \leq x_{zm} + \Delta_{gr}x.$$

Informacje potrzebne do obliczenia błędu granicznego przez użytkownika podawane są przez producenta przyrządu pomiarowego, a uzyskiwane na drodze badania serii wyrobów z wykorzystaniem *wzorca roboczego*.

**Błąd metody** jest szczególnym przypadkiem błędu systematycznego, w którym znane jest oszacowanie jego *wartości* także co do *znaku*. Występuje on zarówno w pomiarach bezpośrednich jak i pośrednich, i wynika z uproszczonej analizy procesu pomiarowego.

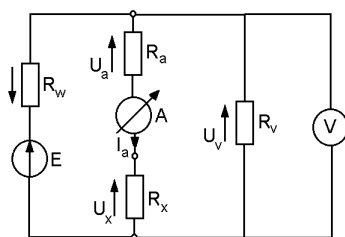
Jeżeli badacz dysponuje dokładniejszym opisem procesu pomiarowego, może analitycznie oszacować wartość błędy metody (tzw. *poprawkę*) i dokonać *korekcji wyniku pomiaru*.

Typowym przykładem w *miernictwie elektronicznym* jest uwzględnienie rozptyłu prądów i rozkładu napięć w układzie pomiarowym z wykorzystaniem *praw Kirchhoffa*. Takie analizy stosuje się np. uwzględniając:

- rezystancję (impedancję) wejściową woltomierza przy pomiarach napięcia,
- rezystancję (impedancję) wewnętrzną amperomierza przy pomiarach natężenia prądu,
- rezystancje mierników przy pośrednim pomiarze oporu.

Na przykład układ pośredniego pomiaru nieznanej rezystancji  $R_x$  opornika (układ z poprawnym pomiarem prądu), z bezpośrednim pomiarem napięcia i natężenia prądu (i wykorzystaniem *prawa Ohma*) wygląda następująco:





Nieskorygowany wynik pomiaru pośredniego (oznaczony falą), zgodnie z prawem Ohma, wynosi:

$$\tilde{x} = \tilde{R} = \frac{U_v}{I_a},$$

gdzie  $U_v$  to wskazanie woltomierza, a  $I_a$  jest wskazaniem amperomierza. Zauważmy, że w zastosowanym układzie na napięcie wskazywane przez woltomierz składają się spadki napięcia na badanym oporniku ( $U_x$ ) i amperomierzu ( $U_a$ ), zatem:

$$U_v = U_x + U_a.$$

Stąd:

$$\tilde{x} = \frac{U_v}{I_a} = \frac{U_x}{I_a} + \frac{U_a}{I_a} = R_x + R_a.$$

Zatem wynik pomiaru pośredniego  $\tilde{x}$  obliczony zgodnie z prawem Ohma jest zawsze przeszacowany o tę samą wartość równą rezystancji wewnętrznej amperomierza ( $R_a$ ) – mamy zatem do czynienia z *błędem systematycznym*, który jednocześnie jest *błędem metody*:

$$\tilde{x} = x + \Delta_s x.$$

Na podstawie powyższych rozważań można wyznaczyć poprawkę  $P$  w postaci:

$$P = -\Delta_s x$$

i dokonać korekcji wyniku pomiaru:

$$x = \tilde{x} + P,$$

czyli

$$R_x = \tilde{R}_x + P = U_v / I_a - R_a.$$

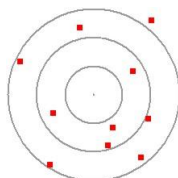
Warto pamiętać, że poprawka nie eliminuje pozostałych *błędów systematycznych* (towarzyszących *pomiarom bezpośrednim* czy wynikających z nadal zbyt uproszczonych opisów matematycznych), zatem:

$$x_{zm} = \tilde{x} + P \approx x_0.$$

## 7.5. Probabilistyczna interpretacja dokładności pomiaru

**Błąd przypadkowy** to błąd, który przy kolejnych pomiarach tego samego stanu mierzonej wielkości w tych samych warunkach przyjmuje wartości rozrzucone losowo.

O obecności błędów przypadkowych w wykonywanych pomiarach można się przekonać obserwując serię pomiarów tego samego stanu mierzonej wielkości wykonanych w tych samych warunkach – wyniki są do siebie podobne, ale różne.



Dobrym *oszacowaniem* wartości prawdziwej  $x_0$  wielkości mierzonej jest wartość oczekiwana  $\mu_x$ , szacowana jako *wartość średnia*  $\bar{x}$  z  $N$  pomiarów o wartościach  $x_i$ :

$$\mu_x \approx \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i .$$

Miarą (oszacowaniem) dokładności każdego z pomiarów w analizowanej serii jest **odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru**  $\sigma_x$ :

$$\sigma_x \approx s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} .$$

Odchylenie standardowe  $\sigma_x$  wyraża uśredniony rozrzut wyników pojedynczych pomiarów wokół wartości średniej i jest pojęciem wykorzystywanym w rozważaniach teoretycznych. W praktyce posługujemy się jego oszacowaniem  $s_x$ , zwanym w statystyce *estymatorem* odchylenia standardowego.

Podniesienie poszczególnych różnic do kwadratu powoduje, że wyniki operacji stają się nieujemne (a zatem nie zredukują się przy sumowaniu), a pierwiastkowanie po procesie uśrednienia daje wymiar fizyczny  $s_x$  taki sam jak mierzonej wielkości.

Podany wzór (tzw. nieobciążony estymator wartości średniej) wynika z prac naukowych z zakresu *statystyki matematycznej*. Aby uzyskać nieobciążoność estymatora, suma podpierwiastkowa musi być dzielona przez  $(N - 1)$ , a nie  $N$  (co wynika ze zmniejszonej o jeden wartości liczby stopni swobody).

Ponieważ dokładniejszym oszacowaniem wartości prawdziwej (niż wynik pojedynczego pomiaru) jest wartość średnia z serii, zatem należy określić dokładność jej wyznaczenia – jest nią **odchylenie standardowe wartości średniej**  $\sigma_{\bar{x}}$ :

$$\sigma_{\bar{x}} \approx s_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{N}} s_x = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} .$$

Jak widać, oszacowanie odchylenia standardowego *wartości średniej*  $s_{\bar{x}}$  uzyskuje się dzieląc  $s_x$  dla *pojedynczego pomiaru* przez pierwiastek z liczby pomiarów w serii. Oznacza to, że oszacowanie  $x_0$  w postaci średniej z np. ze

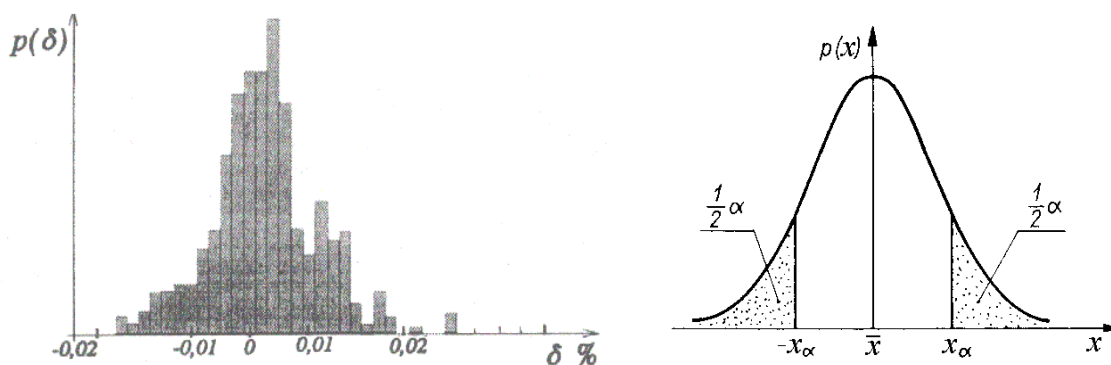
100 pomiarów jest 10 razy dokładniejsze, niż pojedynczy pomiar danej wielkości (w warunkach występowania błędów przypadkowych). Powyższy wzór wyprowadza się w ramach *statystyki*.

Obliczony parametr określający dokładność wykonanych pomiarów (odchylenie standardowe wartości średniej lub pojedynczego pomiaru) można wykorzystać do wyznaczenia *przedziału*, w którym mieści się *wartość prawdziwa* wielkości mierzonej.

Tym razem jednak, w odróżnieniu od *podejścia deterministycznego*, wartość prawdziwa  $x_0$  mieści się w wyznaczonym przedziale tylko z określonym prawdopodobieństwem  $P$  (a nie na pewno). Jak łatwo się domyślić – im większe wybrane prawdopodobieństwo tego, że wyznaczony przedział zawiera  $x_0$ , tym większa musi być szerokość tego przedziału.

Zazwyczaj rozrzut wyników pomiarów w serii wokół wartości średniej ma charakter „dzwonu” – tak jak to widać na poniższym *histogramie* (histogram mówi, ile wartości wpadło do przedziałów określonych przez podstawy słupków tworzących histogram). Taki rozkład błędów (i innych zmiennych losowych) w statystyce nazywa się *rozkładem normalnym* lub *rozkładem Gaussa*. Matematycznie opisuje go krzywa („dzwonowa”, „gaussoida”) pokazana na drugim rysunku. Określa ona gęstość prawdopodobieństwa  $p$  tego, że błąd przypadkowy  $x$  (ogólnie – pewna zmienna losowa) będzie miał daną wartość.

Ponieważ wszystkie prawdopodobieństwa muszą się sumować do jedności, zatem całka z tej funkcji po całej dziedzinie zmienności (a tym samym pole powierzchni pod krzywą) jest równa 1.



Rozkład ten wprowadził do nauki w pierwszej połowie XIX w. C.F. Gauss, zajmując się badaniami krzywizny i rozmiarów Ziemi. To on również zaproponował postać funkcji pozwalającej opisać empirycznie uzyskiwane histogramy. Równanie rozkładu Gaussa pozwoliło m.in. na analityczne obliczenie i stabilizowanie odpowiednich prawdopodobieństw tego rozkładu.

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

W celu określenia szerokości przedziału, w którym  $x_0$  mieści się z prawdopodobieństwem  $P$ , należy przyjąć odpowiedni *poziom istotności*.

**Poziom istotności  $\alpha$**  określa w metrologii maksymalne prawdopodobieństwo tego, że wartość prawdziwa nie mieści się jednak w wyznaczonym przedziale i przyjmuje on małe wartości (najczęściej 0,05; 0,01 lub 0,003).

Dalszym krokiem jest określenie **przedziału ufności**, czyli właśnie tego przedziału, w którym  $x_0$  mieści się z przyjętym prawdopodobieństwem.

Szerokość przedziału ufności jest wprost proporcjonalna do odchylenia standardowego, a wartość **współczynnika proporcjonalności**  $t_{\alpha, N-1}$  zależy od przyjętego poziomu istotności i liczby pomiarów w serii ( $N - 1$  to liczba stopni swobody).

Wartości współczynników  $t_{\alpha, N-1}$  odczytuje się z tablic statystycznych. Jeżeli liczba pomiarów w serii przekroczyła 30, można posłużyć się tablicami *rozkładu normalnego*. Jeżeli jednak zawiera się w przedziale od 2 do 30, to należy skorzystać z tablic *t-Studenta*.

Rozkład *t-Studenta* jest odpowiedni dla mniejszej liczby pomiarów, a przy ich zwiększającej się liczbie jest zbliżony do rozkładu Gaussa. Został zaproponowany przez statystyka angielskiego W.S. Gosseta, publikującego pod pseudonimem Student.

Ostatecznie wynikiem analizy dokładności pomiaru w ujęciu probabilistycznym jest następujący przedział wokół wartości średniej, w którym wartość prawdziwa  $x_0$  mieści się z prawdopodobieństwem  $P = 1 - \alpha$ :

$$P(\bar{x} - t_{\alpha, N-1} s_{\bar{x}} \leq x_0 \leq \bar{x} + t_{\alpha, N-1} s_{\bar{x}}) = 1 - \alpha$$

Niektóre błędy przypadkiem pojawiające się w wynikach pomiarów mają jeszcze inny charakter – wynikają przede wszystkim z ludzkiej niedoskonałości badacza. Nazywane są *błędami grubymi, nadmiernymi lub pomyłkami*.

**Błędy grube** wynikają najczęściej z:

- nieprawidłowego odczytu wskazania przyrządu,
- błędnego zapisu wyniku pomiaru,
- niewłaściwe zastosowanie przyrządu.

*Błędy grube*, ze względu na swe pochodzenie, mają zazwyczaj duże wartości. Jednocześnie prawdopodobieństwo tego, że pojawi się *błąd przypadkowy* o dużej wartości, jest bardzo małe (zakładając *rozkład normalny* tych błędów – patrz rys.). Daje to przesłanki dla procedury wykrywania i pozbywania się błędów grubych.

*Wykrywanie błędów grubych* można przeprowadzić na kilka sposobów. Pierwszy z nich nazywany jest „regułą trzech sigma”. Procedura wygląda wtedy następująco:

- wyznaczenie średniej z serii;
- obliczenie różnic między wartościami kolejnych pomiarów w serii a średnią;
- obliczenie odchylenia standardowego pojedynczego pomiaru  $s_x$ ;
- wyrzucenie z serii tych pomiarów, których wartości różnią się od wartości średniej więcej niż o  $3 \cdot s_x$  (jeżeli liczba pomiarów przekroczyła 30, to  $\alpha < 0.003$ );
- po wyrzuceniu z serii wykrytych *błędów grubych* należy ponownie policzyć *wartość średnią i odchylenie standardowe*.

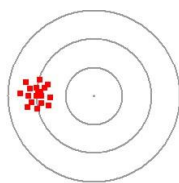
Inne podejście polega na sprawdzeniu, czy podejrzany wynik mieści się w określonym przedziale wartości z przyjętym prawdopodobieństwem. W tym celu stosuje się następującą procedurę postępowania:

- uporządkowanie wyników pomiarów według rosnącej wartości;
- odrzucenie wyniku podejrzanego (najmniejszego lub największego);

- obliczenie dla zredukowanej serii pomiarów wartości średniej i odchylenia standardowego pojedynczego pomiaru;
- wyznaczenie przedziału ufności na przyjętym poziomie istotności;
- odrzucenie wyniku, jeżeli leży on poza przedziałem.

## 7.6. Ocena niepewności pomiaru

Warto pamiętać, że na całkowity błąd pomiaru  $\Delta$  składają się omawiane uprzednio przyczyny zarówno o charakterze systematycznym ( $\Delta_S$ ) jak i przypadkowym ( $\Delta_P$ ). Zakładając ich wzajemną niezależność, można zapisać:  $\Delta = \Delta_S + \Delta_P$ .



Jednakże przedstawione podejścia: deterministyczne i probabilistyczne uwzględniają tylko jedną składową (niejawnie zakładając, że druga jest w porównaniu z nią pomijalnie mała).

W roku 1993 Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna (ISO) opublikowała dokument pt. „Guide to the expression of uncertainty in measurement” wychodzący naprzeciw potrzebie ujednoliconego podejścia do analizy dokładności pomiarów, uwzględniającego oba typy błędów.

**Niepewność pomiaru** to parametr związany z wynikiem pomiaru, charakteryzujący rozrzut wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać wartości mierzonej.

Ostatecznie parametr ten pozwala na wyznaczanie granic przedziału ufności obejmującego nieznaną wartość prawdziwą mierzonej wielkości z zadaniem prawdopodobieństwem.

**Niepewność standardowa**  $u_x$  to odchylenie standardowe średniej arytmetycznej z serii pomiarów (lub jej oszacowanie) dla określonego rozkładu prawdopodobieństwa.

$$u_x = \sigma_{\bar{x}} \text{ lub } u_x = s_{\bar{x}}$$

Poza *rozkładem normalnym* czy *rozkładem t-Studenta*, zmienne losowe (jak np. ta, która opisuje rozrzut błędów przypadkowych) mogą mieć również inne rozkłady. Można np. założyć, że prawdopodobieństwa tego, iż  $x_0$  ma wartości z przedziału określonego przez błąd graniczny są jednakowe – rozkład taki nazywa się *jednostajny*. Dla każdego rozkładu prawdopodobieństwa można wyznaczyć wartość średnią i odchylenie standardowe.

Czasami o rozrzucie wyników pomiarów decydują jednocześnie różne zjawiska losowe – każde charakteryzujące się innym rozkładem prawdopodobieństwa, dając ostatecznie łączny efekt (zwany *splotem*). Wtedy wszystkie one muszą być uwzględnione podczas obliczania niepewności pomiaru, poczynsz od wyznaczenia *niepewności standardowej łącznej*.

**Niepewność standardowa łączna**  $u_S$  (zwana też *niepewnością złożoną*) to odchylenie standardowe rozkładu prawdopodobieństwa będącego splotem rozkładów składowych. Znając niepewności standardowe  $u_i$  poszczególnych  $n$  rozkładów, wyznacza się ją następująco:

$$u_S = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}.$$

Następnym krokiem jest obliczenie **niepewności rozszerzonej**  $U$  z wykorzystaniem *niepewności łącznej* oraz *współczynnika rozszerzenia*  $k_p$ , którego wartość zależy od przyjętego poziomu istotności  $\alpha$  (albo poziomu ufności równego  $1 - \alpha$ ):

$$U = k_p(\alpha) u_S,$$

która pozwala na wyznaczenie granic przedziału ufności wokół oszacowanego wyniku pomiaru  $x_{zm}$  na przyjętym poziomie istotności:

$$P(x_{zm} - U < x_0 < x_{zm} + U) = 1 - \alpha.$$

Przedstawione dotąd aspekty określania *niepewności pomiaru* mają wiele wspólnego z tradycyjnym *podejściem probabilistycznym*. Jednakże, jak wiadomo, funkcjonują też inne podejścia do szacowania niedokładności pomiarowej. Dlatego w zaleceniach ISO wprowadza się podział niepewności na dwa typy – A i B.

**Niepewność typu A** ( $u_A$ ) wyznacza się metodami statystycznymi na podstawie wyników z serii pomiarów – wyraża ona efekty losowe. Stąd:

$$u_A = \sigma_{\bar{x}} \text{ lub } u_A = s_{\bar{x}}.$$

**Niepewność typu B** wyznacza się za pomocą innych metod – wyraża ona efekty systematyczne.

Wynika stąd, że każdy błąd systematyczny, poza błędem o znanej wartości i znaku uwzględnianym jako poprawka, można uważać za niepewność typu B. Do grupy tej można zaliczyć np. ocenę błędów granicznych przyrządów pomiarowych.

Jednakże również i w tym przypadku oszacowaniom efektów systematycznych należy przypisać konkretne rozkłady prawdopodobieństwa. Na przykład położenie  $x_0$  w przedziale danym przez  $\Delta_{gr}$  opisuje się *jednostajnym rozkładem prawdopodobieństwa*, dla którego można obliczyć odchylenie standardowe  $\sigma_J$ , a tym samym *niepewność typu B*:

$$u_B = \sigma_J = \frac{\Delta_{gr}}{\sqrt{3}}.$$

Ostatecznie, po wyznaczeniu wartości niepewności typu A i typu B, oblicza się *niepewność łączną*:

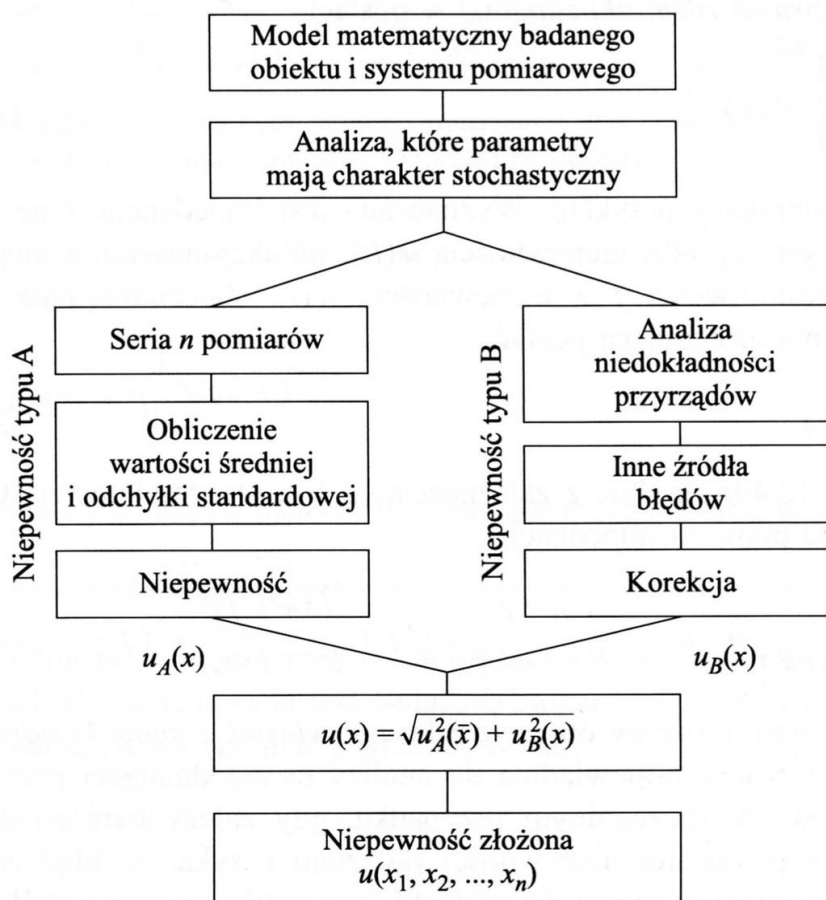
$$u_S = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}.$$

**Wartość współczynnika rozszerzenia** zależy od rozkładu prawdopodobieństwa cechującego wynik pomiaru.

W przypadku *niepewności typu A* najczęściej mamy do czynienia z *rozkładem Gaussowskim* (dla liczby pomiarów w serii  $N \geq 30$ ) lub *t-Studenta* (dla  $N < 30$ ). W sytuacji gdy  $u_A \gg u_B$ , współczynnik  $k_p$  należy odczytać z tablic statystycznych danego rozkładu.

W przypadku *niepewności typu B* najczęściej dostępna jest informacja pozwalająca obliczyć błąd graniczny pomiaru. Wtedy, przy spełnieniu warunku  $u_A \ll u_B$ , współczynnik rozszerzenia przybiera wartość  $\sqrt{3}$  (rozkład jednostajny).

Jeżeli niepewności typu A i B są porównywalne, to  $k_p$  oblicza się na podstawie spłotu odpowiednich rozkładów prawdopodobieństwa.



## 7.7. Szacowanie niedokładności pomiarów pośrednich

**Źródła błędu pomiaru pośredniego** podzielić można na dwa rodzaje: *błędy pomiarów bezpośrednich* oraz *niedokładność opisu matematycznego* (w stosunku do rzeczywistości) wykorzystanego do obliczenia wyniku pomiaru pośredniego.

Wpływ błędów pomiarów bezpośrednich na niedokładność pomiaru pośredniego oszacowuje się zgodnie z „regułą propagacji błędów”, a niedokładności opisu matematycznego oszacowuje się stosując bardziej rozbudowane modele obiektu lub zjawiska (gdy jest to możliwe).

## Reguła propagacji błędów

Ilościowe *przenoszenie się błędów systematycznych* z pomiarów bezpośrednich na wynik pomiaru pośredniego (dotyczy to przede wszystkim błędów granicznych) można wyznaczyć obliczając różniczkę zupełną dla zastosowanego równania matematycznego ogólnej postaci:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Wtedy różniczka zupełna (przyrost  $d$  wartości funkcji spowodowany przyrostami jej argumentów) wynosi:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n,$$

gdzie  $\partial$  jest operatorem pochodnej cząstkowej.

Przechodząc od  $d$  do przyrostów skończonych  $\Delta$  otrzymuje się:

$$\Delta y \approx \frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} \Delta x_n.$$

Ponieważ widoczne w powyższym wzorze pochodne mogą mieć znak „+” lub „-” i nieznane są znaki analizowanych błędów systematycznych, należy uwzględnić najgorszy przypadek:

$$\Delta_{sy} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| \Delta_{sx_i},$$

gdzie  $\Delta_{sy}$  jest błędem systematycznym pomiaru pośredniego, a  $\Delta_{sx_i}$  to błędy systematyczne pomiarów bezpośrednich.

Wyniki pomiarów bezpośrednich mogą mieć charakter stochastyczny (np. są one średnimi z serii pomiarów kilku wielkości fizycznych). Wtedy ilościowe *przenoszenie się błędów przypadkowych* (określonych przez odchylenie standardowe odpowiedniego rozkładu prawdopodobieństwa) analizowane jest w oparciu o definicję i własności odchylenia standardowego. Ostatecznie uzyskuje się wzór analogiczny do oszacowania błędu systematycznego pomiaru pośredniego:

$$\Delta_{py} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta_{px_i} \right)^2},$$

gdzie  $\Delta_{py}$  jest błędem przypadkowym pomiaru pośredniego, a  $\Delta_{px_i}$  to błędy systematyczne pomiarów bezpośrednich. Wynik taki uzyskuje się przy założeniu, że zmienne losowe opisujące rozrzuty pomiarów bezpośrednich są od siebie niezależne, a użyta w obliczeniach funkcja  $f$  jest w przybliżeniu liniowa.

Powyższe oszacowanie odgrywa szczególną rolę przy analizie *niepewności pomiarów pośrednich*, gdyż w tym ujęciu wyniki pomiarów bezpośrednich traktowane są jako realizacje zmiennych losowych.



Zakładając niezależność tych zmiennych losowych oraz pomijalną nieliniowość stosowanej funkcji  $f$ , powyższe równanie można stosować do obliczania *niepewności pomiaru pośredniego*, pamiętając że:

- gdy  $u_A \gg u_B$ , to  $\Delta_p x_i \approx u_{A_i}$ ,
- gdy  $u_A \ll u_B$ , to  $\Delta_p x_i \approx u_{B_i}$ ,
- gdy  $u_A$  i  $u_B$  są porównywalne, to  $\Delta_p x_i \equiv u_{S_i}$ .

Założenia o niezależności zmiennych losowych i/lub liniowości równania matematycznego często nie są spełnione. Wtedy powyższy wzór należy uzupełnić o kowariancje tych zmiennych i/lub o dodatkowe wyrazy wynikające z rozwinięcia funkcji  $f$  w szereg Taylora.

Współczynnik rozszerzenia  $k_p$  wyznacza się na podstawie splotu rozkładów poszczególnych zmiennych losowych.

W przypadku dominacji *niepewności typu A* i *normalnego rozkładu* wyników każdego z pomiarów pośrednich, spłot ma również *rozkład normalny*, można zatem korzystać z tablic rozkładu normalnego lub *t-Studenta* (w zależności od liczności pomiarów w serii).

W przypadku dominacji *niepewności typu B* i *jednostajnego rozkładu* wyników każdego z pomiarów pośrednich można przyjąć, że spłot trzech lub więcej takich rozkładów ma również *rozkład normalny*. Spłot dwóch rozkładów jednostajnych daje *rozkład trapezowy*, który dla równych błędów granicznych tych dwóch pomiarów redukuje się do *rozkładu trójkątnego*.

## 7.8. Zagadnienia kontrolne

Co nazywamy błędem pomiaru i jaka jest jego wartość

Jakie są fizyczne przyczyny granic dokładności pomiaru

Czym charakteryzuje się deterministyczna interpretacja niedokładności pomiaru

Co to jest błąd graniczny

Skąd się bierze błąd metody i jak można go wyeliminować

Czym charakteryzuje się błąd przypadkowy

Sposób wyznaczania przedziału ufności

Metody wykrywania i eliminacji błędów grubych

Co to jest niepewność pomiaru

Cechy charakterystyczne niepewności typu A i typu B

Na czym polega „reguła propagacji błędów”

## 8. Analiza wyników pomiarów

### 8.1. Zapis wyniku pomiaru

**Cyfry znaczące** w zapisie wyniku pomiaru (który jest przybliżeniem wartości prawdziwej) informują o dokładności wykonanego pomiaru. Cyframi znaczącymi są wszystkie cyfry poza początkowymi zerami w zapisie dziesiętnym (np. w liczbie 0,045 cyfry znaczące to 4 i 5).

Wynik pomiaru zapisuje się z taką liczbą cyfr znaczących, że tylko ostatnia z nich jest niepewna (tzn. że niedokładność pomiaru interpretowana deterministycznie nie powinna przekraczać 5 jednostek następnej cyfry). Wynika stąd, że ostateczna postać zapisu zależy od oszacowanej niedokładności pomiaru.

Zera na końcu wyniku pomiaru mogą być znaczące (tzn. niedokładność pomiaru jest w stosunku do nich liczbą mniejszego rzędu). Jeżeli w liczbie całkowitej końcowe zera nie są cyframi znaczącymi, stosuje się zapisy wykładnicze. Np. w zapisie 3200 oba zera są znaczące, a w  $3,2 \cdot 10^3$  nie są, choć formalnie  $3200 \equiv 3,2 \cdot 10^3$ .

Postać zapisu wyniku pomiaru uzależniona jest też od **najmniejszej jednostki pomiarowej**, czyli najmniejszej rozdzielczości, z jaką można odczytać wynik z przyrządu pomiarowego.

#### Zaokrąglanie wyniku pomiaru

Określenie precyzji liczb, za pomocą których przedstawiany jest wynik pomiaru, rozpoczyna się od zaokrąglenia *oszacowania niedokładności pomiaru*. Reguła zaokrąglania w tym przypadku składa się z trzech elementów:

- oszacowanie niedokładności (zazwyczaj jest nim *niepewność pomiaru*) zaokrągla się zawsze „w górę”;
- oszacowanie niedokładności zaokrągla się do jednej cyfry znaczącej;
- jeżeli błąd zaokrąglenia w stosunku do pełnej liczby przekracza 20%, to oszacowanie niedokładności zaokrągla się do dwóch cyfr znaczących (zgodnie z zaleceniem *Unii Fizyki Czystej i Stosowanej*).

Zaokrąglanie „w górę” zabezpiecza przed sytuacją, w której wartość prawdziwa mierzonej wielkości po zaokrągleniu niedokładności pomiaru znalazłaby się poza określonym przez nią przedziałem wartości.

Kolejnym krokiem jest zaokrąglenie liczby wyrażającej wartość wielkości mierzonej. Liczby te zaokrągla się „w górę” lub „w dół” w zależności od wartości cyfr odrzucanych. Obowiązują tu następujące reguły:

- wartość wielkości mierzonej zaokrągla się tak, aby jej ostatnia cyfra znacząca znajdowała się na tym samym miejscu dziesiętnym, co ostatnia cyfra znacząca zaokrąglonej niedokładności pomiaru;
- jeżeli pierwsza z odrzucanych cyfr jest większa niż 5, lub jest równa 5 a następne nie są zerami, to następuje zaokrąglenie „w górę”;
- jeżeli pierwsza z odrzucanych cyfr jest mniejsza niż 5, to następuje zaokrąglenie „w dół”;
- jeżeli odrzucana cyfra jest 5, to następuje zaokrąglenie wyniku do liczby parzystej.

#### Zapis wyników operacji matematycznych

W *pomiarach pośrednich* należy przeliczyć wyniki *pomiarów bezpośrednich*. Wszystkie obliczenia na wynikach pomiarów należy wykonywać tak, aby nie wprowadzały one

dodatkowych błędów (takich, które wynikają z zaokrągleń matematycznych, a nie z błędów pomiarowych). Dlatego też należy przestrzegać następujących reguł:

- obliczenia pośrednie należy wykonywać na liczbach niezaokrąglonych, a jeżeli istnieje powód do ich zaokrąglania, to powinno się uwzględniać przynajmniej 4 cyfry znaczące;
- wyniki obliczeń pośrednich polegających na mnożeniu, dzieleniu, potęgowaniu itp. zapisuje się ze względną dokładnością tego samego rzędu, co dokładność liczby zapisanej mniej precyzyjnie;
- wyniki obliczeń pośrednich polegających na dodawaniu i odejmowaniu zapisuje się tak, aby ich najmniej znacząca cyfra znajdowała się na tym samym miejscu dziesiętnym, co cyfra najmniej znacząca w liczby zapisanej mniej dokładnie.

Względna dokładność zapisu liczby to stosunek wartości jej najmniej znaczącej cyfry do pełnej liczby. Można ją wyrażać w procentach.

## 8.2. Schematy analizy wyników pomiarów

Ostateczny *wynik pomiaru* podawany jest najczęściej w postaci dwóch liczb: *oszacowania wartości prawdziwej* oraz *oszacowania niedokładności pomiaru*. Wyjątkiem są wyniki pomiarów pośrednich złożonych, gdzie jednocześnie uzyskuje się wartości kilku mierzonych wielkości wraz z określeniem ich niedokładności. *Analiza wyników pomiarów* polega na takim opracowaniu liczb odczytywanych z przyrządów pomiarowych oraz informacji podawanych przez producenta przyrządu, aby poprawnie określić i zapisać wynik pomiaru.

Sposoby analizy wyników pomiarów zależą od zastosowanych przyrządów pomiarowych, liczby przeprowadzonych pomiarów oraz podejścia do interpretacji ich wyników: tradycyjnego (*deterministycznego* lub *probabilistycznego*) czy też obowiązującego w praktyce inżynierskiej – polegającego na określaniu *niepewności pomiaru*.

### 8.2.1. Schemat analizy deterministycznej

Podejście deterministyczne uwzględnia *błędy systematyczne*. Do najważniejszych jego elementów należy wyznaczanie *błędu granicznego* pozwalającego na określenie przedziału, w którym z pewnością mieści się wartość prawdziwa oraz obliczenie *poprawki* (jeżeli jest to możliwe) prowadzące do korekty wyniku pomiaru w przypadku występowania *błędu metody*.

W podejściu deterministycznym można zaproponować następujący schemat analizy wyników pomiarów:

- zapis wskazania przyrządu pomiarowego z dokładnością, na jaką pozwala odczyt z przyrządu;
- oszacowanie niedokładności pomiaru (najczęściej w postaci błędu granicznego);
- oszacowanie błędu metody (jeżeli występuje i jest to możliwe);
- jeżeli błąd metody przekracza (typowo) 10% błędu granicznego, korekcja wyniku pomiaru o wartość poprawki;
- w przypadku pomiaru pośredniego: 1) obliczania wyniku pomiaru na podstawie wyników pomiarów bezpośrednich i odpowiedniego równania matematycznego, 2) oszacowanie niedokładności pomiaru zgodnie z prawem propagacji błędów systematycznych;
- zaokrąglenia wyników zgodnie z regułami;
- zapis kompletnego wyniku pomiaru, najczęściej w postaci:  $x = x_{zm} \pm \Delta_{gr}x$ .

Błąd graniczny  $\Delta_{gr}$  oblicza się na podstawie informacji podanej przez producenta miernika.

W przypadku *mierników analogowych* informacja taka podana jest na polu odczytowym w pobliżu podziałki w postaci klasy miernika  $kl$  wyrażonej w procentach. Wtedy:

$$\Delta_{gr}x = \frac{kl \cdot Z_x}{100\%},$$

gdzie  $Z_x$  jest zakresem miernika nastawionym w czasie pomiaru (wiele mierników ma regulowane zakresy).

W przypadku *mierników cyfrowych* informacja pozwalająca obliczyć błąd graniczny podana jest w instrukcji do przyrządu i ma postać wzoru:

$$\Delta_{gr}x = \delta \cdot x_{zm} + d \text{ dgt},$$

gdzie  $\delta$  i  $d$  to parametry miernika związane z *błędem systematycznym* i *błędem dyskretyzacji* (wartości liczbowe podawane są dla odpowiednich zakresów miernika), a „dgt” (skrót od: *digit* – cyfra) oznacza miejsce dziesiątne najmniej znaczącej cyfry, którą można odczytać z miernika na danym zakresie (tzw. ziarno wyświetlacza cyfrowego).

Stosując *prawo propagacji błędów systematycznych* w pomiarach pośrednich zauważyć można pewne reguły, jeżeli operacje wykonywane na wynikach pomiarów bezpośrednich są tylko dodawaniami/odejmowaniami lub mnożeniami/dzieleniami. Prześledźmy to na przykładach.

Przykład: Pośredni pomiar obwodu trójkąta

Pomiar taki polega na bezpośrednim zmierzeniu trzech boków ( $a$ ,  $b$  i  $c$ ) oraz obliczeniu obwodu  $l$ :

$$l = a + b + c.$$

Zgodnie z prawem propagacji błędów mamy:

$$\Delta_{gr}l = \left| \frac{\partial l}{\partial a} \right| \Delta_{gr}a + \left| \frac{\partial l}{\partial b} \right| \Delta_{gr}b + \left| \frac{\partial l}{\partial c} \right| \Delta_{gr}c = \Delta_{gr}a + \Delta_{gr}b + \Delta_{gr}c$$

Przykład ten ilustruje regułę: *Bezwzględny błąd graniczny wyniku pomiaru pośredniego uzyskanego przez dodawanie/odejmowanie wyników pomiarów bezpośrednich jest równy sumie bezwzględnych błędów granicznych pomiarów bezpośrednich.*

Przykład: Pośredni pomiar rezystancji opornika (1)

W tym przypadku wymusza się przepływ prądu stałego przez badany opornik i mierzy występujący na nim spadek napięcia  $U$  oraz natężenie płynącego przez niego prądu  $I$ , a następnie do obliczenia  $R$  wykorzystuje prawo Ohma (w tym przykładzie pomijamy błąd metody):

$$R = \frac{U}{I}.$$

Zatem:

$$\Delta_{gr}R = \left| \frac{\partial R}{\partial U} \right| \Delta_{gr}U + \left| \frac{\partial R}{\partial I} \right| \Delta_{gr}I = \frac{1}{I} \Delta_{gr}U + \frac{U}{I^2} \Delta_{gr}I.$$

Dzieląc obie strony powyższej zależności przez  $R = U/I$ , otrzymuje się:

$$\frac{\Delta_{gr}R}{R} = \frac{\Delta_{gr}U}{U} + \frac{\Delta_{gr}I}{I} \Rightarrow \delta_{gr}R = \delta_{gr}U + \delta_{gr}I.$$

Tym razem zilustrowaliśmy regułę: *Względny błąd graniczny wyniku pomiaru pośredniego uzyskanego przez mnożenie/dzielenie wyników pomiarów bezpośrednich jest równy sumie względnych błędów granicznych pomiarów bezpośrednich.*

Błąd (lub jego oszacowanie) wyrażony w jednostkach miary nazywany jest *błędem bezwzględnym* i oznaczany jako  $\Delta$ , natomiast ten błąd (lub oszacowanie) odniesiony do wartości prawdziwej i wyrażony (najczęściej) w % to błąd względny  $\delta$ :

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x_0} \cdot 100\% \approx \frac{\Delta x}{x_{zm}} \cdot 100\%.$$

Zdarzają się sytuacje, że do deterministycznej analizy dokładności pomiarów pośrednich wymagających wielu mnożeń/dzieleni prościej jest zastosować tzw. *różniczkę logarytmiczną* (zamiast zwykłej *różniczki zupełnej*), co polega na wykonaniu dwóch operacji na używanej zależności matematycznej: 1) obustronnego logarytmowania i 2) obliczenia różniczki zupełnej.

Przykład: Pośredni pomiar rezystancji opornika (2)

W podobnych warunkach jak poprzednio, logarytmując prawo Ohma mamy:

$$\ln R = \ln U - \ln I.$$

Licząc dalej różniczkę zupełną (pamiętając, że  $d \ln x = dx/x$ ) otrzymuje się:

$$\frac{\partial}{\partial R}(\ln R) dR = \frac{\partial}{\partial U}(\ln U) dU - \frac{\partial}{\partial I}(\ln I) dI,$$

czyli

$$\frac{dR}{R} = \frac{dU}{U} - \frac{dI}{I}$$

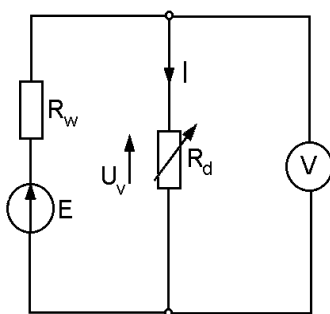
i przechodząc do przyrostów zupełnych i wartości bezwzględnych:

$$\frac{\Delta_{gr}R}{R} = \frac{\Delta_{gr}U}{U} + \frac{\Delta_{gr}I}{I} \Rightarrow \delta_{gr}R = \delta_{gr}U + \delta_{gr}I.$$

Najczęściej jednak w pomiarach pośrednich występują zależności bardziej zróżnicowane matematycznie niż te, które były rozważane przed chwilą. Wtedy należy posługiwać się regułą propagacji błędów systematycznych opartą o różniczkę zupełną. Opracowano jednak wiele metod, gdzie odpowiednio przemyślane „sztuczki” znaczenie upraszczają analizę niedokładności pomiaru.

Przykład: Pomiar rezystancji wewnętrznej źródła napięcia

Rzeczywiste źródło napięcia elektrycznego opisuje się za pomocą dwóch podstawowych parametrów, których wartości można zmierzyć. Są to: rezystancja wewnętrzna  $R_w$  oraz siła elektromotoryczna  $E$ . Układ pomiarowy (jak na rys.) wykorzystuje opornicę dekadową (regulowany wzorzec użytkowy rezystancji) i woltomierz.



Pomiar przebiega w dwóch etapach, dla różnych nastaw opornicy dekadowej  $R_{d1}$  i  $R_{d2}$ , a mierzone wtedy napięcia wynoszą odpowiednio  $U_{v1}$  i  $U_{v2}$ . Z praw Kirchhoffa wynikają następujące relacje:

$$I_1 = \frac{E}{R_w + R_{d1}} \Rightarrow U_{v1} = R_{d1} I_1 = \frac{R_{d1} E}{R_w + R_{d1}},$$

$$I_2 = \frac{E}{R_w + R_{d2}} \Rightarrow U_{v2} = R_{d2} I_2 = \frac{R_{d2} E}{R_w + R_{d2}}.$$

Wtedy  $R_w$  obliczyć można następująco:

$$\frac{U_{v1}}{U_{v2}} = \frac{R_{d1}(R_w + R_{d2})}{R_{d2}(R_w + R_{d1})} \Rightarrow R_w = \frac{R_{d1} R_{d2} (U_{v1} - U_{v2})}{R_{d1} U_{v2} - R_{d2} U_{v1}}.$$

Zmierzona rezystancja wewnętrzna źródła nieliniowo zależy od nastaw rezystancji dekadowej i zmierzonych bezpośrednio napięć, tym samym skomplikowany (i żmudny w wyprowadzeniu) jest wzór na błąd graniczny pomiaru pośredniego, gdyż

$$\Delta_{gr} R_w = f(\Delta_{gr} R_{d1}, \Delta_{gr} R_{d2}, \Delta_{gr} U_{v1}, \Delta_{gr} U_{v2}).$$

Dokonując jednak pomiaru dla  $R_{d1} = \infty$  (opornica odłączona) i takiego  $R_{d2}$ , że  $U_{v2} \approx \frac{1}{2} U_{v1}$ , uzyskuje się:

$$R_w = \frac{R_{d2} (U_{v1} - U_{v2})}{U_{v2}} \cong R_{d2}, \quad \Delta_{gr} R_w \cong \Delta_{gr} R_{d2}.$$

### 8.2.2. Schematy analizy statystycznej

Podejście probabilistyczne uwzględnia *błędy przypadkowe*. W wyniku analizy serii pomiarów wyznacza się przedział, w którym z wartością prawdziwą mieści się z przyjętym prawdopodobieństwem.

W tym podejściu rozróżnić należy dwie podobne, aczkolwiek różne sytuacje: *analizę właściwości serii wyrobów* (identycznych technologicznie) oraz *analizę serii pomiarów tej samej wartości*.

#### Seria wyrobów

Nowoczesne technologie pozwalają na produkcję dużych serii „identycznych” wyrobów. Ponieważ jednak wiele czynników wpływających na produkcję zmienia się w sposób niekontrolowany i ma charakter losowy, utrzymanie jakości serii wymaga kontroli (tj. pomiarów) wybranych właściwości produktów.

Kluczową sprawą dla analizy serii wyrobów jest to, iż każdy z nich jest fizycznie innym obiektem o innej (własnej) wartości prawdziwej kontrolowanej wielkości. Stąd schemat analizy wyników pomiarów przybiera postać:

- zapis (rejestracja) poszczególnych wyników z serii pomiarów,
- wyznaczenie *wartości średniej* z serii,
- wyznaczenie *odchylenia standardowego pojedynczego pomiaru*,
- obliczenie *przedziału ufności* na wybranym poziomie istotności  $\alpha$  (korzystając z *odchylenia standardowego pojedynczego pomiaru* oraz rozkładu *t-Studenta* lub *rozkładu normalnego* w zależności od liczby pomiarów),
- sprawdzenie (na podstawie obliczonych wskaźników), czy seria wyrobów spełnia określone wymagania.

#### Seria pomiarów tej samej wartości

Odmierna w swej istocie jest sytuacja, gdy wielokrotnie (w obecności błędów przypadkowych) mierzy się tę samą wartość badanej wielkości, gdyż teraz w każdym pomiarze wartość prawdziwa jest ta sama. Stąd następujący schemat analizy wyników:

- zapis (rejestracja) poszczególnych wyników z serii pomiarów,
- wyznaczenie *wartości średniej* z serii,
- wyznaczenie *odchylenia standardowego pojedynczego pomiaru*,
- analiza wyników i odrzucenie pomiarów obarczonych *błędami grubymi* oraz ponowne obliczenie powyższych parametrów (jeżeli wykryto błędy grube),
- wyznaczenie *odchylenia standardowego średniej*,
- obliczenie *przedziału ufności* na wybranym poziomie istotności  $\alpha$  (korzystając z *odchylenia standardowego średniej* oraz rozkładu *t-Studenta* lub *rozkładu normalnego* w zależności od liczby pomiarów),
- w przypadku pomiarów pośrednich parametry wyznaczone w powyższy sposób dla każdej z wielokrotnie mierzonych wielkości ( $\bar{x}_i$  oraz  $\sigma_{\bar{x}_i}$ ) wykorzystuje się do obliczenia wyniku pomiaru pośredniego oraz jego odchylenia standardowego (zgodnie z odpowiednim równaniem oraz regułą propagacji błędów przypadkowych).

### 8.2.3. Schemat oceny niepewności pomiaru

Niepewność pomiaru jest parametrem określającym jego niedokładność z uwzględnieniem błędów zarówno *systematycznych* jak i *przypadkowych*.

Analizując niepewność pomiaru można wyróżnić trzy zasadnicze przypadki: 1) dominuje niepewność *typu A*, 2) dominuje niepewność *typu B* i 3) obie niepewności są porównywalne.

#### Ocena niepewności typu A

Niepewność typu A wyznacza się metodami statystycznymi, a zatem zgodnie z wcześniej przedstawionymi schematami. Jeżeli spełniony jest warunek  $u_A \gg u_B$ , to niepewność łączna  $u_S \approx u_A$  co prosto pozwala wyznaczyć niepewności rozszerzoną (określającą przedział ufności).

#### Ocena niepewności typu B

Niepewność typu B wyznacza się metodami innymi niż statystyczne, np. wykorzystując obliczony błąd graniczny pojedynczego pomiaru lub inne informacje określające błędy systematyczne. Tym razem trzeba jednak posiadane informacje przeliczyć na niepewność typu B, np. zakładając rozkład jednostajny błędu pomiaru w przedziale określonym przez błąd graniczny (wtedy  $u_B = \Delta_{gr}/\sqrt{3}$ ). Jeżeli spełniony jest warunek  $u_A \ll u_B$ , to niepewność łączna  $u_S \approx u_B$ . Pozwala to wyznaczyć niepewności rozszerzoną używając współczynnika rozszerzenia odpowiedniego dla danego rozkładu (np. dla rozkładu jednostajnego przyjmuje się najczęściej  $k_p = \sqrt{3}$ ).

#### Ocena niepewności typu A i B

Ten najczęściej spotykany przypadek wymaga w ogólności bardziej skomplikowanych obliczeń związanych łącznymi rozkładami niepewności A i B. W praktyce zwykle niepewność typu A ma rozkład bliski normalnemu, a niepewności typu B można przypisać rozkład jednostajny (w przedziale określonym przez błędy systematyczne). Schemat postępowania wygląda następująco:

- obliczenie metodami statystycznymi niepewności typu A,
- obliczenie innymi metodami (np. w oparciu o wartość błędu granicznego) niepewności typu B,
- obliczenie niepewności łącznej  $u_S = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$ ,
- obliczenie współczynnika rozszerzenia i wyznaczenie przedziału ufności na przyjętym poziomie istotności,
- w przypadku pomiarów pośrednich parametry wyznaczone w powyższy sposób dla każdej z mierzonych wielkości wykorzystuje się do obliczenia wyniku pomiaru pośredniego oraz jego niepewności (zgodnie z odpowiednim równaniem oraz regułą propagacji niepewności pomiarowych).

Obliczenie współczynnika rozszerzenia wymaga obliczenia splotu odpowiednich rozkładów niepewności typu A i B, co zwykle nie jest proste. W praktyce inżynierskiej dopuszczalne jest w takiej sytuacji stosowanie  $k_p$  takiego, jak dla rozkładu normalnego.



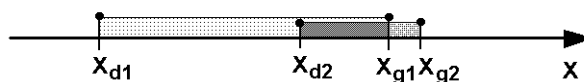
### 8.3. Analiza wyników pomiarów o różnej dokładności

Zdarzają się sytuacje, w których badacz dysponuje kilkoma wynikami pomiarów tej samej wartości badanej wielkości wykonanych różnymi miernikami lub metodami, charakteryzujących się zatem różną dokładnością.

Analizę takich wyników pomiarów ponownie należy rozpatrzyć w kontekście interpretacji *deterministycznej* i *probabilistycznej*.

**Podejście deterministyczne** sprowadza się do:

- wyznaczenia przedziału, w którym mieści się wartość prawdziwa, dla każdego z pomiarów;
- wyznaczenie części wspólnej tak otrzymanych przedziałów (jak na rys.):



$$x_0 \in \langle x_{d2}, x_{g1} \rangle$$

- odpowiedni zapis wyniku pomiaru, uwzględniający nowe granice przedziału z pewnością zawierającego wartość prawdziwą:

$$x_{zm} = x_{d2} + \frac{x_{g1} - x_{d2}}{2}, \quad \Delta_{gr} x = \frac{x_{g1} - x_{d2}}{2}.$$

**Podejście probabilistyczne** polega na obliczeniu tzw. *średniej ważonej* oraz jej odchylenia standardowego w sytuacji, gdy dysponujemy kilkoma seriami pomiarów tej samej wartości (każda o innej dokładności).

Pierwszym etapem jest wyznaczenie *wartości średnich* i *odchyłeń standardowych średnich* dla każdej z serii pomiarów, a potem wag  $w_i$  proporcjonalnych do ich dokładności (a zatem odwrotnie proporcjonalnych do kwadratów odchyłeń standardowych, czyli wariancji  $\bar{\sigma}_i^2$ ):

$$w_i = 1/\bar{\sigma}_i^2.$$

Następnie liczona jest średnia ważona  $\bar{x}_w$  zgodnie ze wzorem:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_i w_i x_i}{\sum_i w_i}$$

oraz odchylenie standardowe średniej ważonej:

$$\bar{\sigma}_w = \sqrt{\frac{\sum_i w_i^2 \bar{\sigma}_i^2}{\left(\sum_i w_i\right)^2}}.$$

Obliczone w powyższy sposób przedziały (zarówno w podejściu deterministycznym jak i probabilistycznym) są zawsze mniejsze lub równe najmniejszemu przedziałowi z pojedynczego pomiaru lub serii pomiarowej, zatem przedstawione schematy analizy wyników o różnej dokładności pozwalają dokładniej oszacować wartość prawdziwą.

## 8.4. Zagadnienia kontrolne

Reguły zaokrągleń wyników pomiarów

Schemat deterministycznej analizy wyników pomiarów

Schematy probabilistycznej analizy wyników pomiarów

Schemat oceny niepewności pomiaru

Schematy analiza wyników pomiarów o różnej dokładności